

具有扰动的二阶多智能体系统预定时间一致性控制

马小陆¹, 杨姚¹, 梅宏², 李诺¹, 强孚民¹

(1. 安徽工业大学 电气与信息工程学院, 安徽 马鞍山 243032; 2. 南京航空航天大学 航天学院, 南京 210000)

摘要: 针对受外部扰动的二阶多智能体系统一致性控制问题, 提出一种基于滑模技术的分布式预定时间控制策略。首先, 在无向图条件下设计二阶分布式预定时间观测器, 在有效解决代数环问题的同时降低通信负担, 确保每个跟随者能够在预定时间内精确估计领导者状态信息。其次, 基于系统状态误差设计新型分布式预定时间滑模面, 有效提高系统收敛速度。进一步地, 设计一种考虑外部扰动的预定时间一致性分布式控制协议, 保证系统状态跟踪误差在预定时间内收敛至零点。此外, 结合代数图论以及李雅普诺夫理论, 严格证明闭环系统的预定时间稳定性, 并推导出系统初始状态未知情况下的稳定时间上界估计值。最后, 通过数值仿真对比实验验证本文策略与理论分析的有效性与可行性。结果表明: 与有限时间控制策略相比, 本文策略的收敛时间与系统初始值无关且收敛性能更优; 与固定时间控制策略相比, 本文策略的收敛时间上界独立于智能体初始状态及控制器参数, 仅由单一时间参数决定, 具有收敛时间预估精确、设定便捷、保守性低等显著优势。

关键词: 滑模技术; 外部扰动; 一致性控制; 观测器; 预定时间; 二阶多智能体系统; 分布式控制

中图分类号: TP 273 **文献标志码:** A **doi:** 10.12415/j.issn.1671-7872.24180



Prespecified-time Consensus Control for Second-order Multi-agent Systems with Disturbances

MA Xiaolu¹, YANG Yao¹, MEI Hong², LI Nuo¹, QIANG Fumin¹

(1. School of Electrical & Information Engineering, Anhui University of Technology, Maanshan 243032, China;

2. School of Aeronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210000, China)

Abstract: Aiming at the consensus control problem of second-order multi-agent systems with external disturbances, a distributed predefined-time control strategy based on sliding mode technology was proposed. Under undirected graph conditions, a second-order distributed predefined-time observer was designed to resolve the algebraic loop issue while reducing communication burden, and it was ensured that each follower could accurately estimate the leader's state information within a predefined time. Using the system state error, a novel distributed predefined-time sliding surface was designed to improve the convergence speed effectively. Furthermore, a predefined-time consensus distributed control protocol considering external disturbances was designed to guarantee the system state tracking error convergence to zero within the predefined time. Additionally, through algebraic graph theory and Lyapunov theory, the predefined-time stability of the closed-loop system was rigorously proven, and the upper bound of the stabilization time was derived for unknown initial states. Finally, comparative numerical simulations verified the effectiveness and feasibility of the proposed strategy and theoretical analysis. The results show that compared with finite-time control strategies, the convergence time of the proposed strategy is independent of the

收稿日期: 2024-10-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(61472282, 62172004, 62072002); 安徽省高校协同创新项目(GXXT-2023-020)

作者简介: 马小陆(1979—), 男, 安徽芜湖人, 博士, 博士后, 教授, 主要研究方向为嵌入式、车联网、机器人。

引文格式: 马小陆, 杨姚, 梅宏, 等. 具有扰动的二阶多智能体系统预定时间一致性控制[J]. 安徽工业大学学报(自然科学版), 2025, 42(5):510-519.

system's initial values and its convergence performance is proven superior, whereas against fixed-time control strategies, the upper bound of the convergence time is not only independent of the agents' initial states and controller parameters but is solely determined by a single time parameter, with significant advantages of precise convergence time estimation, simplified parameter tuning, and reduced conservatism.

Keywords: sliding mode technology; external disturbance; consensus control; observer; predefined time; second-order multi-agent systems; distributed control

多智能体系统 (multi-agent systems, MASs) 是由多个自主智能体组成的群体系统,在数据融合^[1]、无人机集群编队^[2]、智能电网调控^[3]等领域展现出显著应用价值。相比传统集中式系统, MASs 具备分布式拓扑结构、强鲁棒性与高容错性等优势,能有效满足大规模复杂系统的控制需求^[4]。一致性是 MASs 研究的核心问题,其通过控制协议使各智能体与邻近智能体进行信息交换,最终实现整个系统的输出收敛到共同值^[5-6]。然而,传统的一致性控制策略大多依赖于全局信息或连续通信,这在实际应用中难以满足,特别是在大规模分布式系统中,通信资源的限制和网络延迟问题尤为突出。此外,现有方法在面对系统动态变化、外部干扰及初始条件不确定性时,难以保证快速收敛能力及鲁棒性,这些因素显著限制了 MASs 在复杂环境下的应用效果。二阶多智能体系统指每个智能体具有二阶动力学模型,其动态特性更为复杂,协同控制面临更大挑战。因此,针对复杂动态系统中的奇点问题和外部干扰,研究具有扰动的二阶多智能体系统在预定时间内的一致性控制问题,对于提升系统响应能力与稳定性、增强环境适应性及实现复杂环境下多智能体协调合作具有重要意义。

在 MASs 的一致性控制中,收敛速度是衡量协议性能的关键指标之一,能够有效反映系统达成一致的效率。相较于收敛时间趋近于无穷的渐进时间控制^[7-9],有限时间控制凭借其更快的收敛速度、更高的控制精度及更强的抗干扰和不确定性能力而备受关注。Yang 等^[10]通过引入分布式控制策略解决了有向切换拓扑下多智能体系统的有限时间一致性控制问题;Wang 等^[11]设计的连续非奇异积分终端滑膜控制器有效消除了系统奇异性和抖振现象,增强了鲁棒性并提高响应速度。然而其有限时间收敛估算仍依赖于不可预知的系统初始值和参数,影响了收敛时间的精确预估。为克服有限时间控制策略的局限性,学者们引入了固定时间控制,并针对无向拓扑^[12-15]、有向拓扑^[16]和切换拓扑^[17]等网络结构提出了相应控制协议,实现了固定时间内的一致性控制。为进一步解决固定时间收敛时间上界与调整

参数间的复杂关系, Sánchez-torres 等^[18]提出了预定时间控制策略,通过预先设定系统稳定时间参数,使收敛时间高度可调且灵活可控。MASs 的二分一致性控制同样能在预定时间内实现, Li 等^[19]、Ren 等^[20]、马小陆等^[21]的研究表明,在符号图条件下能够实现多智能体的预定时间二分一致性跟踪控制; Mei 等^[22]针对二阶 MASs,设计了分布式估计器和自适应滑模控制协议,实现了预定时间领导-跟随一致性控制。尽管 Wu 等^[23]提出的滑模控制器能在单智能体系统中实现预定时间跟踪,但奇点问题的存在使得该结果难以直接推广至 MASs 的一致性控制。此外, Ni 等^[24]的研究未考虑外部干扰的影响。鉴于此,本文针对受外部扰动的 MASs,设计二阶分布式预定时间观测器与滑模面,并提出一种新型分布式控制策略,旨在为多机器人及航天器等实际工程应用中的多智能体集群一致性控制问题提供理论参考。

1 预备知识与问题描述

多智能体系统 (MASs) 一致性问题的研究融合了控制理论、稳定性理论和代数图论等多学科理论。其中,代数图论作为描述智能体间拓扑结构与信息交互关系的重要数学工具,通过借助图的邻接矩阵和拉普拉斯变换等代数方法,能够有效分析系统的一致性能,从而为多智能体系统的一致性控制提供理论基础。

1.1 预备知识

1.1.1 记号说明

文中 \mathbf{R} 表一维实空间、 \mathbf{R}^N 表示 N 维实向量空间、 $\mathbf{R}^{N \times N}$ 表示 $N \times N$ 实矩阵空间、 I_n 表示 n 维单位矩阵、 $\mathbf{1}_N = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbf{R}^N$ 。 $|\bullet|$ 代表绝对值符号。对于向量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \in \mathbf{R}^N$, $\alpha \in \mathbf{R}$, 定义其分数次幂 $\mathbf{x}^\alpha = [x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_N^\alpha]^T \in \mathbf{R}^N$ 。相似地, 定义 $\text{sig } \mathbf{x} = [\text{sign}(x_1)|x_1|^\alpha, \dots, \text{sign}(x_N)|x_N|^\alpha]^T$ 和 $\text{sign}(\mathbf{x}) = [\text{sign}(x_1), \dots, \text{sign}(x_N)]^T$, 其中 $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数:

$$\text{sign } h = \begin{cases} 1, & h > 0 \\ 0, & h = 0 \\ -1, & h < 0 \end{cases}$$

定义 p 范数为 $\|x\|_p = (|x_{i1}|^p + |x_{i2}|^p + \dots + |x_{iN}|^p)^{\frac{1}{p}}$, 其中 $p > 0$ 。定义 $D = \text{diag } w \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为元素 $w_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的对角矩阵。定义 \otimes 为克罗内克乘积, 假设有2个矩阵 $O \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 和 $Q \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 则矩阵 O 和矩阵 Q 的克罗内克乘积定义为:

$$O \otimes Q = \begin{pmatrix} o_{11}Q & \cdots & o_{1N}Q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ o_{N1}Q & \cdots & o_{NN}Q \end{pmatrix}$$

1.1.2 图论知识

假设用图 $G = \{V, E, A\}$ 表示智能体间的信息交换网络, 其中节点代表智能体。考虑一个无向图, 定义其顶点集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, 边集合 $E = \{(v_i, v_j) | v_i, v_j \in V\} \subseteq V \times V$, 加权邻接矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 其具体表达式如下:

$$A = \begin{cases} a_{ij} = 1, & \text{for } (v_j, v_i) \in E \text{ and } i \neq j \\ a_{ii} = 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

当 $(v_i, v_j) \in E$ 时 $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$ 。对于无向图 $a_{ij} = a_{ji}$, 定义节点 v_i 的邻居集 $N_i = \{v_j \in V | (v_i, v_j) \in E\}$, 拉普拉斯矩阵 $L = D - A \in \mathbf{R}^{N \times N}$, G 的度矩阵

$$D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n), \text{ 对角元素 } d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}。$$

跟随者可实现双向通信, 而领导者至跟随者为单向通信。 \bar{G} 中节点 v_0 表示领导者, 节点 $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 表示跟随者。定义矩阵 $B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 为领导者的邻接矩阵, 当存在一个或多个跟随者能够访问领导者信息时 $b_i = 1$, 否则 $b_i = 0$ 。定义加权矩阵 $H = L + B \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 用以描述 \bar{G} 的拓扑, 其最小和最大特征值分别为 λ_{\min} 和 λ_{\max} 。

1.1.3 相关引理

考虑如下描述的系统:

$$\dot{x} = f(x, t), f(0, t) = 0, x \in \mathbf{R}^N \quad (1)$$

其中: f 表示 $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^N$ 的连续非线性函数; $x(0) = x_0$ 表示初始条件。

引理 1^[25] 假设存在正定径向无界标量函数 $V(x)$ 满足:

$$\dot{V}(x) = -\frac{\pi}{\rho T_0} (V(x)^{1-\rho/2} + V(x)^{1+\rho/2}) \quad (2)$$

其中 $T_0 > 0$ 且 $0 < \rho < 1$, 那么系统的原点是全局预定时间稳定的, T_0 表示预定时间。

引理 2^[26] 对于任意向量 $z \in \mathbf{R}^N$, 若 $p > r > 0$, 其中 p 和 r 为标量常数, 则不等式成立:

$$\|z\|_p \leq \|z\|_r \leq n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} \|z\|_p \quad (3)$$

引理 3^[27] 对于 $\xi_i \in \mathbf{R}$, $0 < p \leq 1$ 且 $q > 1$, 有

$$\sum_{i=1}^N |\xi_i|^p \geq \left(\sum_{i=1}^N |\xi_i| \right)^p \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^N |\xi_i|^q \geq N^{1-q} \left(\sum_{i=1}^N |\xi_i| \right)^q \quad (5)$$

1.2 问题描述

考虑存在扰动下的非线性二阶 MASs, 其第 i 个跟随者的动力学描述为:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) + f_i(t) + d_i(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

其中: $x_i(t) \in \mathbf{R}^N$, $v_i(t) \in \mathbf{R}^N$, 表示第 i 个跟随者的位置和速度; $u_i(t) \in \mathbf{R}^N$, $f_i(t) \in \mathbf{R}^N$, $d_i(t) \in \mathbf{R}^N$, 表示第 i 个跟随者的控制输入、固有非线性和未知外部扰动。

领导者的动力学描述为:

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = v_0(t) \\ \dot{v}_0(t) = u_0(t) \end{cases} \quad (7)$$

其中: $x_0(t) \in \mathbf{R}^N$, $v_0(t) \in \mathbf{R}^N$, 表示领导者的位置和速度; $u_0(t) \in \mathbf{R}^N$, 表示领导者的控制输入。

假设 1 外部扰动 $d_i(t)$ 连续且有界, 满足 $\|d_i(t)\|_{\infty} \leq l$, 其中 $l > 0$ 。

假设 2 领导者控制输入 u_0 满足 $\|u_0\|_{\infty} \leq u_m$, 其中 u_m 为正常数。

假设 3 子图 G 是无向连通图, 并且系统中存在从领导者到每一位追随者的有向路径。

定义 1^[28] 针对给定分布式协议 u_i 的控制, 若对任何 $\varepsilon > 0$ 且 $T_0 > 0$, 使得当 $t \geq T_0$ 时 $|x(t)| \leq \varepsilon$, 其中 T_0 为预定时间, ε 为预定义精度, 则系统(1)的原点是预定义时间稳定的, 则称系统实现了预定时间领导跟随一致性控制。

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T} |x_i(t) - x_0(t)| = 0, \lim_{t \rightarrow T} |v_i(t) - v_0(t)| = 0, \\ x_i(t) = x_0(t), v_i(t) = v_0(t), t \geq T_0, i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (8)$$

2 预定时间一致性控制

针对存在外部扰动的二阶多智能体系统(MASs), 为实现预定时间一致性跟踪控制, 首先为各跟随者设计分布式预定时间观测器, 以在预设时间内精确估计领导者状态信息; 继而, 在此基础上构建分布式预定时间滑模及控制协议, 确保整个系统在预定时间内实现一致性控制。

2.1 预定时间观测器的设计

鉴于领导者信息仅可被其邻域跟随者获取, 设计分布式预定时间观测器, 其数学表达式如下:

$$\dot{\hat{x}}_i = \hat{v}_i - \hat{\alpha} \text{sig} \left[\sum_{j=0}^N a_{ij} (\hat{x}_i - \hat{x}_j) \right]^{1-n} - \hat{\beta} \text{sig} \left[\sum_{j=0}^N a_{ij} (\hat{x}_i - \hat{x}_j) \right]^{1+n} \quad (9)$$

$$\hat{v}_i = -\hat{\alpha} \text{sig} \left[\sum_{j=0}^N a_{ij} (\hat{v}_i - \hat{v}_j) \right]^{1-n} - \hat{\beta} \text{sig} \left[\sum_{j=0}^N a_{ij} (\hat{v}_i - \hat{v}_j) \right]^{1+n} - \hat{\lambda} \text{sign} \left[\sum_{j=0}^N a_{ij} (\hat{v}_i - \hat{v}_j) \right] \quad (10)$$

其中: $\hat{x}_i, \hat{v}_i (i = 1, \dots, N)$ 分别为第 i 个跟随者对领导者位置和速度的估计值; $0 < n < 1, \hat{x}_0 = x_0, \hat{v}_0 = v_0$; 控制增益 $\hat{\alpha} = \pi / (nT_0(2\lambda_{\min}(\mathbf{H}))^{1-n/2}), \hat{\beta} = \pi / (nT_0N^{-n/2}(2\lambda_{\min}(\mathbf{H}))^{1+n/2})$; $\hat{\lambda}$ 为正常数。

定理 1 当满足假设 1 和假设 3 时, 利用分布式预定时间观测器 (式 (9)~(10)), 增益满足 $\hat{\lambda} \geq u_m$, 则可实现观测误差 $\tilde{x}_i = \hat{x}_i - x_0$ 和 $\tilde{v}_i = \hat{v}_i - v_0$ 在预定时间 T_0 内收敛至零点。

证明 令 $y_i = \sum_{j=0}^N a_{ij} (\tilde{x}_i - \tilde{x}_j), z_i = \sum_{j=0}^N a_{ij} (\tilde{v}_i - \tilde{v}_j)$, 分两步进行: 先证明速度观测误差 \tilde{v}_i 在预定时间内收敛, 再证明位置观测误差 \tilde{x}_i 在预定时间内收敛。

步骤 1) 定义 $\tilde{v} = \hat{v} - 1_N \otimes v_0$ 为速度观测误差, $\tilde{v} = [\tilde{v}_1^T, \tilde{v}_2^T, \dots, \tilde{v}_N^T]^T, \hat{v} = [\hat{v}_1^T, \hat{v}_2^T, \dots, \hat{v}_N^T]^T$, 则可得:

$$\dot{\tilde{v}} = \hat{v} - 1_N \otimes \dot{v}_0 = -\hat{\alpha} \text{sig}[(\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{v}]^{1-n} - \hat{\beta} \text{sig}[(\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{v}]^{1+n} - \hat{\lambda} \text{sign}[(\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{v}] - 1_N \otimes u_0 \quad (11)$$

根据式 (11), 定义李雅普诺夫函数:

$$V_1 = \frac{1}{2} \tilde{v}^T (\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{v} \quad (12)$$

通信网络拓扑满足假设 3, 故 V_1 是正定的且是 \tilde{v} 的径向无界函数。记 $v = [v_1, \dots, v_N]^T$, 有 $v = \mathbf{H} \tilde{v}$ 。此外利用引理 3, V_1 的导数满足:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = \tilde{v}^T (\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_n) \dot{\tilde{v}} = & [\varpi_1, \dots, \varpi_N] \left(-\hat{\alpha} [\text{sig}(\varpi_1)^{1-n}, \dots, \text{sig}(\varpi_N)^{1-n}]^T - \right. \\ & \left. \hat{\beta} [\text{sig}(\varpi_1)^{1+n}, \dots, \text{sig}(\varpi_N)^{1+n}]^T - \right. \\ & \left. \hat{\lambda} [\text{sign}(\varpi_1), \dots, \text{sign}(\varpi_N)]^T - \mathbf{u}_0 [1, \dots, 1]^T \right) = \\ & -\hat{\alpha} \sum_{i=1}^N |\varpi_i|^{2-n} - \hat{\beta} \sum_{i=1}^N |\varpi_i|^{2+n} - \hat{\lambda} \sum_{i=1}^N |\varpi_i| - \mathbf{u}_0 \sum_{i=1}^N |\varpi_i| \leq \\ & -\hat{\alpha} \sum_{i=1}^N (|\varpi_i^2|)^{1-\frac{n}{2}} - \hat{\beta} \sum_{i=1}^N (|\varpi_i^2|)^{1+\frac{n}{2}} - (\hat{\lambda} - |\mathbf{u}_m|) \sum_{i=1}^N |\varpi_i| \leq \\ & -\hat{\alpha} \left(\sum_{i=1}^N |\varpi_i^2| \right)^{1-\frac{n}{2}} - \hat{\beta} N^{-\frac{n}{2}} \left(\sum_{i=1}^N |\varpi_i^2| \right)^{1+\frac{n}{2}} \end{aligned} \quad (13)$$

可得到:

$$\frac{\sum_{i=1}^N |\varpi_i|^2}{V_1} = \frac{\tilde{v}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \tilde{v}}{\frac{1}{2} \tilde{v}^T \mathbf{H} \tilde{v}} \geq 2\lambda_{\min}(\mathbf{H}) \quad (14)$$

将 $\sum_{i=1}^N |\varpi_i|^2 \geq 2\lambda_{\min}(\mathbf{H}) V_1$ 代入式 (13) 有:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\hat{\alpha} (2\lambda_{\min}(\mathbf{H}) V_1)^{1-\frac{n}{2}} - \hat{\beta} N^{-\frac{n}{2}} (2\lambda_{\min}(\mathbf{H}) V_1)^{1+\frac{n}{2}} = \\ & -\frac{\pi}{nT_0} \left(V_1^{1-\frac{n}{2}} + V_1^{1+\frac{n}{2}} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

根据引理 1 可知, V_1 和速度观测误差将在预定时间 T_0 内收敛于原点, 即当 $t > T_0$ 时, 有 $v_i = v_0$ 。

步骤 2) 定义位置观测误差 $\tilde{x} = \hat{x} - 1_N \otimes x_0$, 向量 $\tilde{x} = [\tilde{x}_1^T, \tilde{x}_2^T, \dots, \tilde{x}_N^T]^T, \hat{x} = [\hat{x}_1^T, \hat{x}_2^T, \dots, \hat{x}_N^T]^T$, 可得:

$$\dot{\tilde{x}} = \hat{x} - \hat{\alpha} \text{sig}[(\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{x}]^{1-n} - \hat{\beta} \text{sig}[(\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{x}]^{1+n} \quad (16)$$

根据步骤 1) 可知, 当 $t \geq T_0$ 时, 速度观测误差 \tilde{v} 收敛到 0, 即 $\lim_{t \rightarrow T_0} \tilde{v} = 0$, 根据式 (16) 可得:

$$\dot{\tilde{x}} = -\hat{\alpha} \text{sig}[(\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{x}]^{1-n} - \hat{\beta} \text{sig}[(\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{x}]^{1+n} \quad (17)$$

定义李雅普诺夫函数:

$$V_2 = \frac{1}{2} \tilde{x}^T (\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{x} \quad (18)$$

记 $x = [x_1, \dots, x_N]^T$, 有 $\theta = \mathbf{H} \tilde{x}$, 对 V_2 求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = \tilde{x}^T (\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_n) \dot{\tilde{x}} = & [\theta_1, \dots, \theta_N] \\ & \left(-\hat{\alpha} [\text{sig}(\theta_1)^{1-n}, \dots, \text{sig}(\theta_N)^{1-n}]^T - \right. \\ & \left. \hat{\beta} [\text{sig}(\theta_1)^{1+n}, \dots, \text{sig}(\theta_N)^{1+n}]^T \right) = \\ & -\hat{\alpha} \sum_{i=1}^N |\theta_i|^{2-n} - \hat{\beta} \sum_{i=1}^N |\theta_i|^{2+n} \leq \\ & -\hat{\alpha} \sum_{i=1}^N (|\theta_i^2|)^{1-\frac{n}{2}} - \hat{\beta} \sum_{i=1}^N (|\theta_i^2|)^{1+\frac{n}{2}} \leq \\ & -\hat{\alpha} \left(\sum_{i=1}^N |\theta_i^2| \right)^{1-\frac{n}{2}} - \hat{\beta} N^{-\frac{n}{2}} \left(\sum_{i=1}^N |\theta_i^2| \right)^{1+\frac{n}{2}} \leq \\ & -\hat{\alpha} (2\lambda_{\min}(\mathbf{H}) V_2)^{1-\frac{n}{2}} - \hat{\beta} N^{-\frac{n}{2}} (2\lambda_{\min}(\mathbf{H}) V_2)^{1+\frac{n}{2}} = \\ & -\frac{\pi}{nT_0} \left(V_2^{1-\frac{n}{2}} + V_2^{1+\frac{n}{2}} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

根据引理 1 可知, V_2 和位置观测误差 \tilde{x} 在预定时间 T_0 内收敛到零点。

由上述分析可知, 位置观测器误差 \tilde{x} 和速度观测误差 \tilde{v} 可在预定时间 T_0 内收敛到零点, 即 $\lim_{t \rightarrow T_0} \tilde{x} = 0, \lim_{t \rightarrow T_0} \tilde{v} = 0$ 。因此, 在 $2T_0$ 后分布式观测器 (式 (9)~(10)) 能够获得 x_0 和 v_0 的估计值。

定理 1 得证。

注 1 估计误差的收敛速度对多智能体系统的一致性跟踪性能具有关键影响。本文设计的预定义时间估计器不仅能够精确估计领导者状态信息, 其稳定时间上界还独立于系统初始条件和控制参数, 因此兼具更强的实用性和鲁棒性。

注 2 本文设计的分布式预定时间观测器本质上属于滑模估计协议, 可在参数确定的前提下获得精确的稳定时间上界。该观测器的收敛时间上界既不依赖于智能体初始状态, 也与控制器参数无关, 从

而兼具设定简便与保守性低的特点。

2.2 分布式预定时间控制器的设计

基于领导者的状态估计变量 \hat{x}_i 和 \hat{v}_i ,定义第*i*个跟随者一致性跟踪位置误差 e_{xi} 和速度误差 e_{vi} 为 $e_{xi} = x_i - \hat{x}_i$ 和 $e_{vi} = v_i - \hat{v}_i$,对其求导可得:

$$\begin{cases} \dot{e}_{xi} = \dot{x}_i - \dot{\hat{x}}_i = v_i - \hat{v}_i = e_{vi} \\ \dot{e}_{vi} = \dot{v}_i - \dot{\hat{v}}_i = u_i + d_i + f_i - u_0 \end{cases} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

将式(20)改写为向量形式:

$$\begin{cases} \dot{e}_x = v - \hat{v} = e_v \\ \dot{e}_v = u + d + f - 1_N \otimes u_0 \end{cases} \quad (21)$$

其中各变量可表示为: $e_x = [e_{x1}^T, e_{x2}^T, \dots, e_{xN}^T]^T$, $e_v = [e_{v1}^T, e_{v2}^T, \dots, e_{vN}^T]^T$, $u_0 = [u_{01}^T, u_{02}^T, \dots, u_{0N}^T]^T$, $d = [d_1^T, d_2^T, \dots, d_N^T]^T$, $f = [f_1^T, f_2^T, \dots, f_N^T]^T$.

设计第*i*个跟随者的预定时间滑模变量和分布式控制协议,分别如式(22),(23):

$$s_i = k_1 \text{sig} \left[\sum_{j=0}^N a_{ij} (x_i - x_j) \right]^{2-\frac{p}{q}} + k_2 \text{sig} \left[\sum_{j=0}^N a_{ij} (x_i - x_j) \right]^{\frac{p}{q}} + (x_i - \hat{x}_i) + (v_i - \hat{v}_i) \quad (22)$$

$$u_i = -\alpha \text{sig}(s_i)^{1-n} - \beta \text{sig}(s_i)^{1+n} - \lambda \text{sig}(s_i) - k_2 \frac{p}{q} \left| \sum_{j=0}^N a_{ij} (x_i - x_j) \right|^{\frac{p}{q}-1} \sum_{j=0}^N a_{ij} (v_i - v_j) - (v_i - \hat{v}_i) - f(x_i, v_i, t) \quad (23)$$

其中: $k_1, k_2, \alpha, \beta, \lambda$ 为正常数; p, q 为满足 $p < q$ 的奇数。

注3 从式(23)可看出,控制输入 u_i 值仅依赖于邻居和自身状态信息,且仅部分跟随者可直接获取领导者信息,故该控制器属分布式一致性控制器。

定理2 当满足假设1和假设2时,且增益满足 $\lambda > l + u_m$ 时,式(3),(4)描述系统的滑模面 s_i 能够在预定时间 T_1 内收敛到零点。

证明 滑模变量式(22)可改写为向量形式:

$$s = k_1 \text{sig}[(H \otimes I_n) e_x]^{2-\frac{p}{q}} + k_2 \text{sig}[(H \otimes I_n) e_x]^{\frac{p}{q}} + e_x + e_v \quad (24)$$

其中 $s = [s_1^T, s_2^T, \dots, s_N^T]^T$ 。对滑模变量 s 求导可得:

$$\dot{s} = k_1 \left(2 - \frac{p}{q} \right) \text{diag} \left(|(H \otimes I_n) e_x|^{1-\frac{p}{q}} \right) (H \otimes I_n) e_v + k_2 \frac{p}{q} \text{diag} \left(|(H \otimes I_n) e_x|^{\frac{p}{q}-1} \right) (H \otimes I_n) e_v + e_v + \dot{e}_v \quad (25)$$

由式(24),(25)得:

$$\begin{aligned} \dot{e}_v = u + d + f - 1_N \otimes u_0 = & -\alpha \text{sig} s^{1-n} - \beta \text{sig} s^{1+n} - \\ & \lambda \text{sig} s - k_1 \left(2 - \frac{p}{q} \right) \text{diag} \left(|(H \otimes I_n) e_x|^{1-\frac{p}{q}} \right) (H \otimes I_n) e_v - \\ & k_2 \frac{p}{q} \text{diag} \left(|(H \otimes I_n) e_x|^{\frac{p}{q}-1} \right) (H \otimes I_n) e_v - e_v + d - 1_N \otimes u_0 \end{aligned} \quad (26)$$

由式(25),(26)可得:

$$\dot{s} = -\alpha \text{sig} s^{1-n} - \beta \text{sig} s^{1+n} - \lambda \text{sig} s + d - 1_N \otimes u_0 \quad (27)$$

定义李雅普诺夫函数如下:

$$V_3 = \frac{1}{2} s^T s \quad (28)$$

对 V_3 求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = s^T \dot{s} = [s_1^T, s_2^T, \dots, s_N^T] [-\alpha \text{sig} s_i^{1-n} - \\ \beta \text{sig} s_i^{1+n} - \lambda \text{sig} s_i + d - 1_N \otimes u_0] = & -\alpha \sum_{i=1}^N |s_i|^{2-n} - \\ & \beta \sum_{i=1}^N |s_i|^{2+n} - \lambda \text{sig} s_i \sum_{i=1}^N |s_i| - u_0 \sum_{i=1}^N |s_i| + d_i \sum_{i=1}^N |s_i| \leq \\ & -\alpha \sum_{i=1}^N (|s_i^2|)^{1-\frac{n}{2}} - \beta \sum_{i=1}^N (|s_i^2|)^{1+\frac{n}{2}} - (\lambda - l - u_m) \sum_{i=1}^N |s_i| \leq \\ & -\alpha \left(\sum_{i=1}^N |s_i^2| \right)^{1-\frac{n}{2}} - \beta N^{-\frac{n}{2}} \left(\sum_{i=1}^N |s_i^2| \right)^{1+\frac{n}{2}} \end{aligned} \quad (29)$$

若 $\lambda > l + u_m$ 成立,则由引理2和式(29)可得:

$$\frac{\sum_{i=1}^N |s_i|^2}{V_3} \geq 2\lambda_{\min}(H) \quad (30)$$

将式(31)代入式(30)的最后一个不等式,有:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & -\alpha (2\lambda_{\min}(H) V_3)^{1-\frac{n}{2}} - \beta N^{-\frac{n}{2}} (2\lambda_{\min}(H) V_3)^{1+\frac{n}{2}} = \\ & -\frac{\pi}{nT_1} \left(V_3^{1-\frac{n}{2}} + V_3^{1+\frac{n}{2}} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

因此通过引理1可得 $\lim_{t \rightarrow T_1} V_3(s) = 0$,从而 $\lim_{t \rightarrow T_1} s = 0$ 。

定理2得证。

注4 因跟踪误差 e_x 和 e_v 能够在预定时间 $2T_0 + T_1$ 内到达滑模面,且这一过程不依赖于初始条件,故多智能体系统收敛时间也与初始条件无关。

定理3 当满足假设1和假设2时,式(3),(4)描述的系统到达定理2所述的滑模面 s_i 后,跟踪误差 e_x 和 e_v 能够在预定时间 T_2 内沿滑模面收敛到零点,表明系统协议成功实现了预定时间一致性控制。

证明 由定理2和式(25)可得:

$$e_v = -k_1 \text{sig}^{2-\frac{p}{q}} [(H \otimes I_n) e_x] - k_2 \text{sig}^{\frac{p}{q}} [(H \otimes I_n) e_x] - e_x \quad (32)$$

定义李雅普诺夫函数:

$$V_4 = \frac{1}{2} e_x^T (H \otimes I_n) e_x \quad (33)$$

记 $e_x = [e_1, \dots, e_N]^T$,有 $\rho = H e_x$ 。进一步对 V_4 求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 = e_x^T (H \otimes I_n) \dot{e}_x = e_x^T (H \otimes I_n) e_v = & -k_1 e_x^T (H \otimes I_n) \text{sig} [(H \otimes I_n) e_x]^{2-\frac{p}{q}} - \\ & k_2 e_x^T (H \otimes I_n) \text{sig} [(H \otimes I_n) e_x]^{\frac{p}{q}} - e_x^T (H \otimes I_n) e_x = \\ & [\rho_1, \dots, \rho_N]^T \left(-k_1 \left[\text{sig}(\rho_1)^{2-\frac{p}{q}}, \dots, \text{sig}(\rho_2)^{2-\frac{p}{q}} \right]^T - \right. \\ & \left. k_2 \left[\text{sig}(\rho_1)^{\frac{p}{q}}, \dots, \text{sig}(\rho_2)^{\frac{p}{q}} \right]^T - e_x \right) \end{aligned} \quad (34)$$

将式 (35) 代入式 (34) 可得:

$$\begin{aligned}
 V_4 &\leq -k_1 \sum_{i=1}^N |\rho_i|^{2-\frac{p}{q}} - k_2 \sum_{i=1}^N |\rho_i|^{\frac{p}{q}} \leq \\
 &-k_1 \sum_{i=1}^N (|\rho_i^2|)^{1-\frac{p}{2q}} - k_2 \sum_{i=1}^N (|\rho_i^2|)^{\frac{p}{2q}} \leq \\
 &-k_1 N^{-\frac{p}{2q}} \left(\sum_{i=1}^N \rho_i^2 \right)^{1-\frac{p}{2q}} - k_2 \left(\sum_{i=1}^N \rho_i^2 \right)^{\frac{p}{2q}} \leq \\
 &-k_1 N^{-\frac{p}{2q}} (2\lambda_{\min}(\mathbf{H})V_4)^{1-\frac{p}{2q}} - \\
 &k_2 (2\lambda_{\min}(\mathbf{H})V_4)^{\frac{p}{2q}} = -\frac{\pi}{nT_2} \left(V_4^{1-\frac{p}{2q}} + V_4^{\frac{p}{2q}} \right)
 \end{aligned} \tag{35}$$

由引理 1 和式 (36) 得, 跟踪误差 e_x 和 e_v 在预定时间 T_2 内沿滑模面到达零点。

定理 3 得证。

定理 4 若假设 1 与假设 2 成立且参数满足 $\lambda \geq u_m$ 和 $\lambda > l + u_m$, 则存在外部扰动及任意初值的情况下, 应用本文设计的预定时间观测器分布式协议, 可保证二阶多智能体系统在预定时间 $2T_0 + T_1 + T_2$ 内实现一致性跟踪控制。

证明 根据定理 1 可知, 本文设计的分布式预定时间观测器能够使各跟随者在预定时间 $2T_0$ 内精确获取领导者的状态信息。结合定理 2 可得, 应用本文设计的预定时间滑模变量与分布式控制协议, 系统状态能够在预定时间 T_1 内收敛至滑模面。进一步由定理 3 可知, 系统的跟踪误差 e_x 和 e_v 在预定时间 T_2 内沿滑模面收敛到零点。综上所述, 本文提出的分布式预定时间控制协议可保证二阶多智能体系统在预定时间 $2T_0 + T_1 + T_2$ 内实现一致性跟踪控制。

故定理 4 得证。

3 仿真实验与结果分析

为验证所提控制策略的可行性和优越性, 设计两类仿真实验: 第一类为固定拓扑下不同初始状态的仿真实验; 第二类为本文所提预定时间控制策略与有限时间控制策略及固定时间控制策略的对比实验。在不失一般性的情况下, 假设 $n = 2$, 构建多智能体系统, 该系统由 4 个跟随者与 1 个领导者组成, 前者用 1, 2, 3, 4 表示, 后者用 0 表示。利用本文设计的分布式预定时间控制协议, 使二阶多智能体系统实现一致性跟踪控制, 设第 i 个智能体的动力学描述为 $x_i = [x_{i1}, x_{i2}]^T, v_i = [v_{i1}, v_{i2}]^T, i \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$, 其中 $x_{i1}, x_{i2}, v_{i1}, v_{i2}$ 分别为 X 和 Y 方向的位置与速度信息。系统网络通信拓扑结构如图 1。

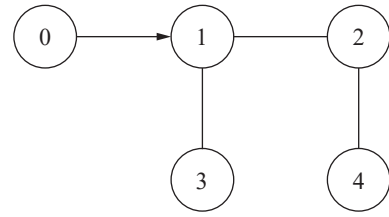


图1 网络通信拓扑

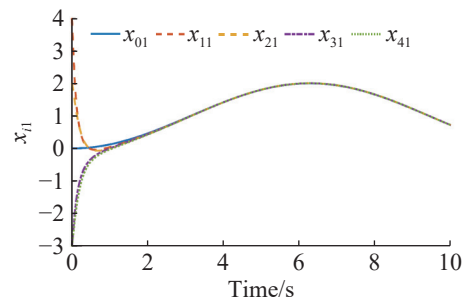
Fig. 1 Network communication topology

其中:

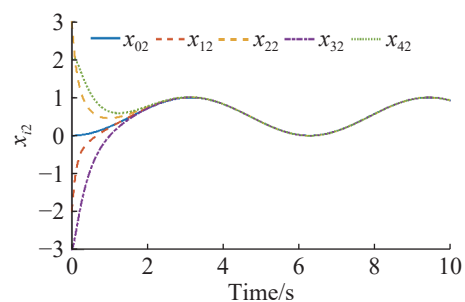
$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1 控制策略的可行性仿真验证

设定领导者与跟随者的初始速度状态为矢量零, 初始位置状态 $x_0 = [0, 0]^T, x_1 = [4, -2]^T, x_2 = [2, 3]^T, x_3 = [-3, -3]^T, x_4 = [-3, 2]^T$; 领导者的控制输入 $u_0 = [0.25 \cos(0.5t), 0.5 \cos t]^T$; 预定时间观测器的初始状态 $\hat{x}_1(0) = \hat{x}_2(0) = \hat{x}_3(0) = \hat{x}_4(0) = 0, \hat{v}_1(0) = \hat{v}_2(0) = \hat{v}_3(0) = \hat{v}_4(0) = 0$; 外部扰动与非线性 $d_1 = f_1 = 0.5[\cos(x_i(t)), \sin v_i(t)]^T, d_2 = f_2 = 0.4[\cos(x_i(t)), \sin v_i(t)]^T, d_3 = f_3 = 0.3[\cos(x_i(t)), \sin v_i(t)]^T, d_4 = f_4 = 0.2[\cos(x_i(t)), \sin v_i(t)]^T$ 。经计算可得特征值 $\lambda = 0.6$, 设定预定时间一致性控制策略所需参数 $p = 7, q = 9, n = 0.5$, 该参数满足本文所提定理的条件。根据定理 1, 2 设计系统收敛时间上界 $T_0 = 1$ 和 $T_1 = 1$ 。设定仿真时间 $t = 10$ s, 智能体位置 x_i 和速度 v_i 在 X 和 Y 方向的运动轨迹及控制输入在 X 和 Y 方向的信号分别如图 2~4。



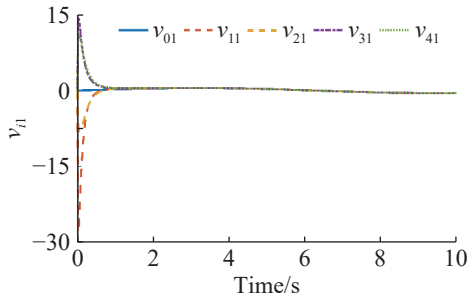
(a) X方向的位置轨迹



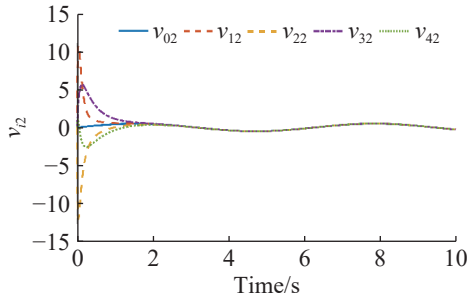
(b) Y方向的位置轨迹

图2 系统位置一致性轨迹

Fig. 2 Position consensus trajectories



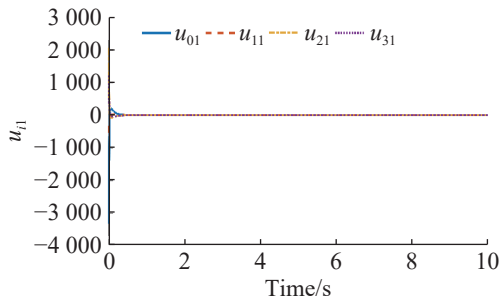
(a) X方向的速度轨迹



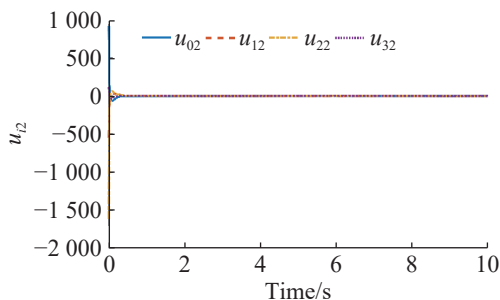
(b) Y方向的速度轨迹

图3 系统速度一致性跟踪

Fig. 3 Velocity consensus tracking



(a) X方向的输入信号



(b) Y方向的输入信号

图4 控制力矩响应曲线

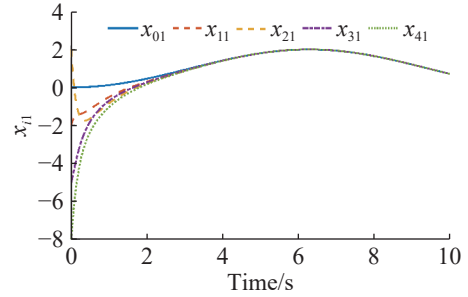
Fig. 4 Response curve of control torque

由图 2~4 可看出: 在满足控制协议及控制增益条件下, 各跟随者的位置和速度状态变量均在 3 s 左右实现对领导者对应状态的跟踪, 且控制输入信号始终保持有界。在此时间点之后, 系统状态维持恒定一致。

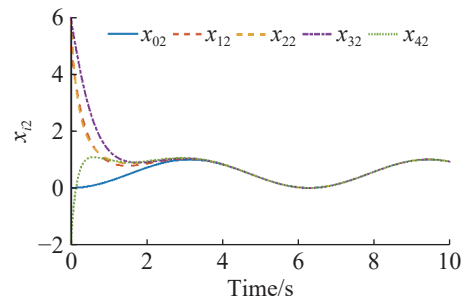
3.2 控制策略的优越性仿真验证

在上述实验的基础上对不同初始位置的跟随者

进行仿真, 将追随者的初始位置更改为 $\mathbf{x}_1 = [-2, 5]^T$, $\mathbf{x}_2 = [2, 6]^T$, $\mathbf{x}_3 = [-5, 6]^T$, $\mathbf{x}_4 = [-8, -2]^T$ 。跟随者位置、速度轨迹及控制输入信号分别如图 5~7。



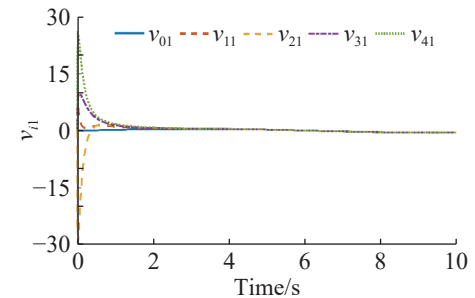
(a) X方向的位置轨迹



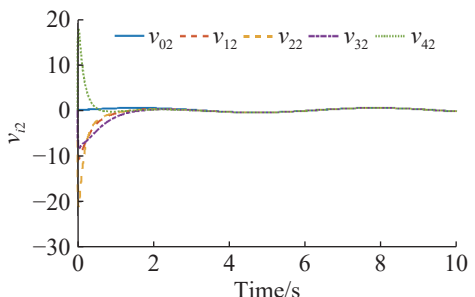
(b) Y方向的位置轨迹

图5 改变追随者初始位置后系统位置一致性轨迹

Fig. 5 Position consensus trajectories under different follower initial positions



(a) X方向的速度轨迹



(b) Y方向的速度轨迹

图6 改变追随者初始位置后系统速度一致性跟踪

Fig. 6 Velocity consensus tracking under different follower initial positions

由图 5~6 可知: 不同初始位置的跟随者均在 3 s 内实现了对领导者对应状态的一致性跟踪。图 7 进

一步表明: 系统在达成一致性控制后, 控制输入信号收敛至零, 验证了在多智能体系统一致性跟踪过程中, 实际收敛时间严格满足预设上界的要求; 同时控制信号始终保持良好的动态特性, 表明系统收敛时间与初始状态无关。具体而言, 无论系统初始状态如何, 均能在预定的时间内达到一致, 且控制信号的动态特性不受初始值影响。

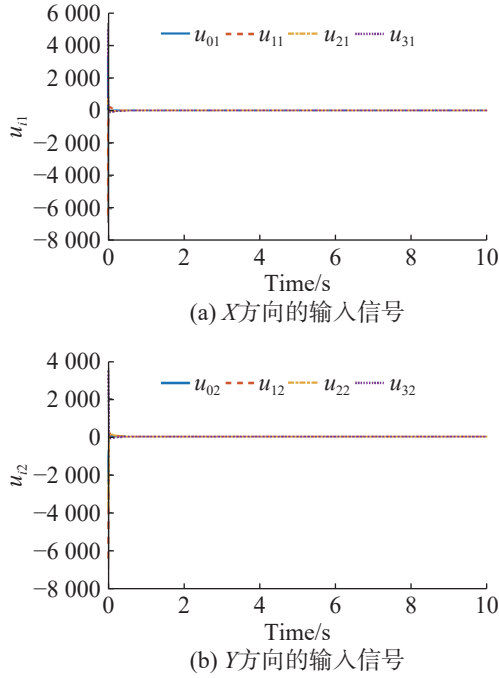


图7 改变追随者初始位置后控制力矩响应曲线

Fig. 7 Response curve of control torque under different follower initial positions

为进一步显示本文所提预定时间滑模控制策略的性能优势, 将其与有限时间控制^[12]和固定时间控制策略^[13]进行比较分析。有限时间与固定时间分布式控制器分别由式 (36), (37) 给出:

$$u_i = -\alpha_1 \sum_{j=0}^N a_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \alpha_2 \sum_{j=0}^N a_{ij}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) - \alpha_3 \text{sign} \left[\sum_{j=0}^N a_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \sum_{j=0}^N a_{ij}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \right] \quad (36)$$

$$u_i = -\alpha_1 \text{sig} \left[\sum_{j=0}^N a_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right]^{1+\frac{p}{q}} - \alpha_1 \text{sig} \left[\sum_{j=0}^N a_{ij} \text{sig}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \right]^{1+\frac{p}{q}} - \alpha_2 \text{sig} \left[\sum_{j=0}^N a_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right]^{1-\frac{p}{q}} - \alpha_2 \text{sig} \left[\sum_{j=0}^N a_{ij}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \right]^{1-\frac{p}{q}} - \alpha_3 \text{sign} \left[\sum_{j=0}^N a_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right] - \alpha_3 \text{sign} \left[\sum_{j=0}^N a_{ij}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \right] \quad (37)$$

为便于比较, 选取位置保持误差指标 (position-keeping error metric, PKM) 和一致性保持位置误差

指标 (consensus-keeping error metric, CKM), 定量评估不同控制策略在位置和一致性保持方面的性能。两指标的计算公式分别如下:

$$\text{PKM} = \sqrt{\sum_{i=1}^N |e_{li}|^2} \quad (38)$$

$$\text{CKM} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N |e_{lij}|^2} \quad (39)$$

其中: $e_{li} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$, 为跟随者 i 的位置跟踪误差; $e_{lij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$, 为跟随者 i 与 j 的相对位置误差。图 8, 9 分别为预定时间、有限时间和固定时间 3 种控制策略下系统的 PKM 和 CKM 仿真结果。

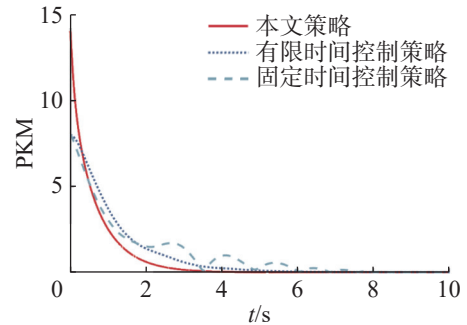


图8 PKM 指标的比较

Fig. 8 Comparison of PKM metrics

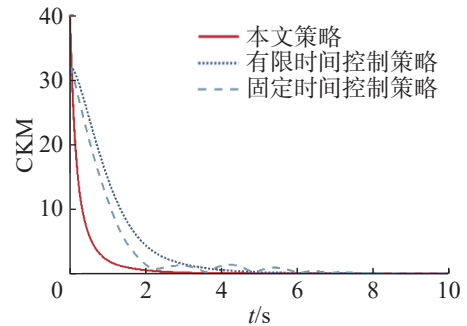


图9 CKM 指标的比较

Fig. 9 Comparison of CKM metrics

由图 8, 9 可知: 本文提出的预定时间控制策略可使系统状态在 4 s 内实现一致性收敛, 而有限时间和固定时间控制策略均需 8 s 才能达到一致。相比二者, 本文提出的预定时间滑模策略具有更快的收敛速度与更优越的控制效果, 验证了其在收敛性能方面的显著优势。

4 结论

针对无向拓扑下二阶多智能体系统的一致性跟踪控制问题, 本文设计了分布式预定时间观测器以实现领导者状态的精准估计; 同时构建了一种新

型预定时间滑模面与分布式控制协议,在有效规避代数环问题并降低系统通信负担的前提下,确保系统状态在预定时间内收敛,并显著提升了收敛速度;基于图论与李雅普诺夫稳定性理论,证明了闭环系统能够在与初始条件无关的预定时间上界内保持稳定,从而大幅增强了系统的鲁棒性与适应性。仿真实验结果表明,所提出策略在收敛时间独立性、预估精度和保守性方面均具有显著优势,其整体收敛性能与控制效果均优于有限时间和固定时间控制策略,验证了该方法的有效性与优越性。

然而,本文仅考虑了固定拓扑结构下的固有非线性二阶多智能体系统,尚未涉及系统不确定非线性与复杂环境等影响因素。未来工作中,将进一步研究切换拓扑下具有不确定非线性的多智能体系统的预定时间一致性和二分一致性控制问题,并将相关方法推广至有向图通信等更广泛的应用场景之中。

参考文献:

- [1] YU W W, CHEN G R, WANG Z D, et al. Distributed consensus filtering in sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2009, 39(6):1568–1577.
- [2] 李正平, 鲜斌. 基于虚拟结构法的分布式多无人机鲁棒编队控制[J]. *控制理论与应用*, 2020, 37(11):2423–2431.
LI Z P, XIAN B. Robust distributed formation control of multiple unmanned aerial vehicles based on virtual structure[J]. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(11):2423–2431.
- [3] DOMYSHEV A, SIDOROV D. Optimization of the structure of power system multi-agent control[J]. *IFAC—Papers OnLine*, 2022, 55(9):250–255.
- [4] NING B D, HAN Q L, ZUO Z Y. Distributed optimization for multiagent systems: an edge-based fixed-time consensus approach[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(1):122–132.
- [5] ZHAO B, ZHANG M Y, HUANG X Y, et al. Finite-time consensus control of second-order multi-agent systems with input saturation constraint[J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2024, 46(16):3269–3281.
- [6] XU F, RUAN X L, PAN X. Event-triggered leader-following consensus control of multiagent systems against DoS attacks[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2024, 22(11):3424–3433
- [7] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9):1520–1533.
- [8] HUANG P F, DI F Q, XU J W, et al. Distributed finite-time dynamic event-triggered consensus control for nonlinear multi-agent systems[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2023, 21(11):3684–3695
- [9] ZHAO L W, HUA C C. Finite-time consensus tracking of second-order multi-agent systems via nonsingular TSM[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 75(1):311–318.
- [10] YANG H P, LI Z. Finite-time consensus for multi-agent systems with directed dynamically changing topologies[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2023, 33(14):8657–8669.
- [11] WANG S, ZHAN X S, WU J, et al. Adaptive finite-time consensus tracking for nonlinear second-order multi-agent systems based on integral sliding mode[J]. *European Journal of Control*, 2024, 80:101122.
- [12] JIA T H, PAN Y N, LIANG H J, et al. Event-based adaptive fixed-time fuzzy control for active vehicle suspension systems with time-varying displacement constraint[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2022, 30(8):2813–2821.
- [13] NI J K, SHI P. Adaptive neural network fixed-time leader-follower consensus for multiagent systems with constraints and disturbances[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 51(4):1835–1848.
- [14] 邹志华, 杨丹. 多智能体系统固定时间比例一致性研究[J]. *电脑知识与技术*, 2024, 20(18):104–106,110.
ZOU Z H, YANG D. Research on consistency of fixed time proportion of multi-agent system[J]. *Computer Knowledge and Technology*, 2024, 20(18):104–106,110.
- [15] HAN J, JIANG H, ZHAO Y. Fixed-time consensus problem for uncertain multi-agent systems with continuous and intermittent control[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2024, 361(16):107179.
- [16] NI J K, SHI P, ZHAO Y, et al. Fixed-time event-triggered output consensus tracking of high-order multiagent systems under directed interaction graphs[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(7):6391–6405.
- [17] 王加朋, 杨家宁, 罗家祥. 切换拓扑下二阶多智能体混合事件触发固定时间一致性[J]. *控制与决策*, 2025, 40(3):775–784.
WANG J P, YANG J N, LUO J X. Hybrid event-triggered fixed-time consensus for second-order multi-agent systems under switching topologies[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(3):775–784.
- [18] SÁNCHEZ-TORRES J D, SANCHEZ E N, LOUKIANOV A G. Predefined-time stability of dynamical systems with sliding modes[C]//2015 American Control Conference. Chicago, IL, USA: IEEE, 2015:5842–5846.
- [19] LI K, HUA C C, YOU X, et al. Output feedback predefined-time bipartite consensus control for high-order nonlinear

- multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2021, 68(7):3069–3078.
- [20] REN Y H, CHEN Z W, JI Y, et al. Predefined-time bipartite tracking consensus for second-order multi-agent systems with cooperative and antagonistic networks[J]. *Journal of Control and Decision*, 2023, 10(2):280–292
- [21] 马小陆, 谭毅波, 梅宏. 符号图下含扰动的多智能体系统预定时间二分一致性 [J]. *控制与决策*, 2024, 39(5): 1517–1526.
- MA X L, TAN Y B, MEI H. Predefined-time bipartite consensus of multi-agent systems with disturbances under signed graph[J]. *Control and Decision*, 2024, 39(5): 1517–1526.
- [22] MEI H, WEN X, MA X L, et al. Adaptive practical predefined-time leader-follower consensus for second-order multiagent systems with uncertain disturbances[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2024, 361(6):106694.
- [23] WU C H, YAN J G, SHEN J H, et al. Predefined-time attitude stabilization of receiver aircraft in aerial refueling[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, 68(10):3321–3325.
- [24] NI J K, LIU L, TANG Y, et al. Predefined-time consensus tracking of second-order multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(4):2550–2560.
- [25] ALDANA-LÓPEZ R, GÓMEZ-GUTIÉRREZ D, JIMÉNEZ-RODRÍGUEZ E, et al. Enhancing the settling time estimation of a class of fixed-time stable systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(12):4135–4148.
- [26] HU B, GUAN Z H, FU M Y. Distributed event-driven control for finite-time consensus[J]. *Automatica*, 2019, 103:88–95.
- [27] XIE S Z, CHEN Q. Adaptive nonsingular predefined-time control for attitude stabilization of rigid spacecrafts[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, 69(1):189–193.
- [28] JIANG J H, CHI J, WU X M, et al. Adaptive predefined-time consensus control for disturbed multi-agent systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2024, 361(1):110–124.

责任编辑: 何莉