

# 基于全变差模型的自适应参数选择方法

魏海广,赵玉,卢立玄,张涛

(安徽工业大学数理科学与工程学院,安徽马鞍山 243032)

**摘要:**针对全变差去噪模型中不能自适应调整正则项参数的缺点,基于Chambolle对偶算法,提出一种自适应对偶投影算法。通过构建全变差模型中的权重与正则项和逼近项之间的函数关系,根据不动点迭代理论,得出权重的更新准则。对于模型中新引入的参数选取问题,根据多元线性回归模型拟合出新参数的选取模型,通过显著性检验,验证了该拟合模型的有效性。实验结果表明,该算法能有效改善去噪效果。

**关键词:**图像去噪;全变差;Chambolle对偶;能量泛函;多元线性回归;自适应

中图分类号:O 29 文献标志码:A doi:10.3969/j.issn.1671-7872.2019.03.009

## Adaptive Parameter Selection Method Based on Total Variation Model

WEI Haiguang, ZHAO Yu, LU Lixuan, ZHANG Tao

(School of Mathematics and Physics, Anhui University of Technology, Ma'anshan 243032, China)

**Abstract:**As for the disadvantage of not being able to adaptively adjust the regularization parameters in the total variation model, an adaptive dual projection algorithm was proposed based on Chambolle's dual algorithm. With the fixed point iteration theory, the relationship among weights, regularization term and approximation term was built, and the update criterion of weight was obtained. For the proposed parameter selection problem, the multiple linear regression model was used to fit the selection model of new parameter. The potential of the proposed method was verified through the significance test. The experimental results show that the algorithm is effective in improving the denoising effect.

**Key words:** image denoising; total variation; Chambolle duality; energy functional; multivariate linear regression; adaptive

对含噪声的图像进行去噪处理一直是图像处理领域的热点和难点之一。在图像去噪中,要保留图像的边缘、纹理等细节信息,以保证修复后的图像与原图像有一定的结构相似性。为此,许多专家学者提出了相关理论和方法,在边缘保护方面,Rudin等<sup>[1]</sup>从能量极小化的角度出发,将全变差半范数作为正则项引入到图像去噪模型中,建立了全变差正则化模型(简称ROF模型),该模型通过引入能量泛函,将图像去噪问题转变为求能量泛函最小问题,在保护图像边缘上取得了良好的效果;在纹理保护方面,Meyer等<sup>[2]</sup>提出TV-G模型,将图像分解为几何部分和纹理部分,Buades等<sup>[3]</sup>提出非局部均值算法,利用像素之间的距离来表示相似度,取得了较好的效果;在数值求解方面,对偶投影算法、ADMM交替方向乘子法<sup>[4]</sup>、Bregman迭代法<sup>[5]</sup>等都能达到快速收敛,易于数值实现。

ROF模型中的能量泛函分为逼近项和正则项两部分。其中:逼近项用于去除噪声,保证去噪后的图像与原图像的相似性;正则项则防止去噪过强,起到抑制噪声的作用。因此,需要选取适当的权重参数用于平衡

收稿日期:2019-05-08

基金项目:国家自然科学基金项目(61701004);安徽省自然科学基金项目(1708085QA15)

作者简介:魏海广(1992—),男,河北邯郸人,硕士生,研究方向为图像复原算法的研究。

通信作者:张涛(1982—),男,山东兖州人,博士,副教授,主要研究方向为小波分析及其应用、图像处理反问题。

这两项的关系<sup>[6]</sup>。目前,国内外已有学者提出了一些权重确定方法,如无偏预测风险估计器<sup>[7]</sup>(URPE),局部方差估计<sup>[8]</sup>,基于Morozov偏差原理<sup>[9]</sup>选取参数等。本文基于全变差正则化模型<sup>[10-11]</sup>,利用Chambolle对偶投影算法<sup>[12-14]</sup>,提出一种参数可随着迭代算法自适应改变的新方法,该方法根据图像的先验信息,能够自适应地选取合适的参数,进而保证去噪后的图像能够保留更多的细节信息。

## 1 模型的建立

ROF模型的基本思想是将图像处理问题看成一个能量系统,其中:不含噪声的图像能量相对较小;当图像被噪声污染后,图像变得不光滑,其能量相应地增大了。通过这种思想,将图像去噪问题转化成一个能量最小化问题,再通过变分法进行求解,模型如下

$$\min_{u \in BV(\Omega)} E(u) = J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|u - f\|^2 \tag{1}$$

其中: $E(u)$ 表示图像的能量; $u$ 为去噪后的图像; $BV$ 表示有界变差函数空间; $\|\cdot\|$ 表示 $L_2$ 范数; $f$ 表示观测图像; $\lambda$ 表示正则化参数; $J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)| dx$ , $\nabla$ 表示梯度算子。模型的第一项为正则项,第二项为逼近项。令图像数据表示为一个 $N \times M$ 的二维矩阵( $i$ 表示矩阵行, $j$ 表示矩阵列), $X$ 表示欧几里得空间,为了定义离散的全变差范数,先给出正则项中离散梯度算子的定义。梯度 $\nabla u$ 是一个在 $Y = X \times X$ 的向量,表示为

$$(\nabla u)_{ij} = ((\nabla u)_{ij}^1, (\nabla u)_{ij}^2) \tag{2}$$

其中: $i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M$ 。

$$(\nabla u)_{ij}^1 = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & i < N \\ 0 & i = N \end{cases} \quad (\nabla u)_{ij}^2 = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & j < M \\ 0 & j = M \end{cases} \tag{3}$$

能量泛函式(1)中的 $J$ 是一阶齐次的,即对任意的 $u$ 和 $\lambda > 0$ ,都有 $J(\lambda u) = \lambda J(u)$ ,在凸分析和凸优化问题中可以得到。

由Legendre-Fenchel变换

$$J^*(v) = \sup_u \langle u, v \rangle_x - J(u) \tag{4}$$

其中, $\langle u, v \rangle_x = \sum_{ij} u_{ij} v_{ij}$ 。对于闭凸集 $K$ , $J^*$ 为示性函数<sup>[15]</sup>

$$J^* = x_K(v) = \begin{cases} 0 & v \in K \\ +\infty & \text{其他} \end{cases}$$

## 2 模型的求解

### 2.1 投影算法

最小化能量泛函模型

$$\min_u E(u) = \frac{1}{2} \|u - \lambda f\|_2^2 + \lambda J(u) \tag{5}$$

其中, $f \in X, \lambda > 0, \|u\|^2 = \langle u, u \rangle_x$ ,该模型表达式的欧拉-拉格朗日方程为 $0 \in u - f + \lambda \partial J(u)$ 。其中, $\partial J$ 表示次微分,定义为 $w \in \partial J(u) \Leftrightarrow J(u) \geq J(u) + \langle w, v - u \rangle_x$ ,对于任意的 $v$ ,欧拉-拉格朗日方程式可以表示为 $(f - u)/\lambda \in \partial J(u)$ ,等价于 $u \in \partial J^*((f - u)/\lambda)$ ,再经变形可得

$$\frac{f}{\lambda} \in \frac{f - u}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \partial J^*\left(\frac{f - u}{\lambda}\right) \tag{6}$$

令 $w = (f - u)/\lambda$ ,则式(6)可写成

$$0 \in w - \frac{f}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \partial J^*(w) \tag{7}$$

式(7)是式(8)泛函的欧拉-拉格朗日方程

$$\min E(w) = \frac{1}{\lambda} J^*(w) + \frac{(w - f/\lambda)^2}{2} \tag{8}$$

因此,  $w=(f-u)/\lambda$  是该式的极小值,  $J^*$  由式(4)给出, 若  $P_{K_x}$  表示在集合  $K$  上的投影, 得模型的解为

$$u=f-P_{K_x}(f) \quad (9)$$

散度算子  $\text{div}$  表示为

$$(\text{div } p)_{i,j} = \begin{cases} p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1 & 1 < i < N \\ p_{i,j}^1 & i = 1 \\ -p_{i-1,j}^1 & i = N \end{cases} + \begin{cases} p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2 & 1 < j < M \\ p_{i,j}^2 & j = 1 \\ -p_{i,j-1}^2 & j = M \end{cases} \quad (10)$$

这样, 将计算  $u$  的问题转化成了计算非线性算子  $P_{K_x}$  问题。非线性投影算子的计算等价于求解于下列问题

$$\min_p \left\{ \|\lambda \text{div } p - f\|_2 : p \in Y, |p_{i,j}|^2 - 1 \leq 0, \forall i, j = 1, \dots, N \right\} \quad (11)$$

在KKT条件<sup>[8]</sup>下, 存在拉格朗日乘子  $\alpha_{i,j} \geq 0$ , 满足

$$-(\nabla(\lambda \text{div } p - f))_{i,j} + \alpha_{i,j} p_{i,j} = 0 \quad (12)$$

结合梯度下降算法, 取  $\tau > 0$ ,  $p^0 = 0$ , 对任意  $n \geq 0$ , 有

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + \tau \left( \nabla(\text{div } p^n - \frac{f}{\lambda})_{i,j} - \left| \nabla(\text{div } p^n - \frac{f}{\lambda})_{i,j} \right| p_{i,j}^n \right) \quad (13)$$

整理得

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \tau \left( \nabla(\text{div } p^n - \frac{f}{\lambda})_{i,j} \right)}{1 + \tau \left| \left( \nabla(\text{div } p^n - \frac{f}{\lambda})_{i,j} \right) \right|} \quad (14)$$

由式(14)得到  $p_{i,j}^{n+1}$ , 再根据命题<sup>[10]</sup>, 令  $\tau \leq \frac{1}{8}$ , 当  $n \rightarrow +\infty$  时,  $\lambda \text{div } p^n$  收敛于  $P_{K_x}(f)$ , 由此得投影算子的值, 再结合式(9), 即可求得解  $u$ 。

## 2.2 自适应参数的选取

ROF模型中处理后的图像与原图相比都存在不同程度的模糊, 图像清晰度下降。原因在于求解模型的算法中选取的正则项参数是固定的, 不能随着迭代算法进行自适应地改变。若选取的参数过大, 去噪程度过强, 则会导致处理后的图像过于光滑, 不能保护纹理边缘等细节部分; 若选取的参数过小, 去噪程度低, 不能达到去噪效果, 进而影响算法的准确性。

文中通过构建正则项、逼近项和结构相似性之间的函数关系式, 使模型参数能够随着迭代的进行自适应地选取合理值。能量泛函表达式为

$$\min_{u \in \text{BV}(\Omega)} E(u) = J(u) + \frac{1}{2\lambda} \|u - f\|_2^2 \quad (15)$$

其中:  $J(u)$  为正则项;  $\frac{1}{2\lambda} \|u - f\|_2^2$  为逼近项, 记为  $E_0(u)$ 。对于每幅含噪声的图像, 当权重  $\lambda$  确定时, 逼近项和正则项是唯一确定的, 因此可以构造权重  $r(\lambda)$  关于正则项和逼近项的函数关系为

$$r(\lambda) = wE_0(u) - J(u) \quad (16)$$

式中  $w$  为调节参数。由式(16)权衡正则项和逼近项之间的平衡关系。在迭代过程中,  $r(\lambda) = 0$ , 根据不动点迭代原理, 权重更新准则<sup>[16-17]</sup>为

$$\lambda_{n+1} = wE_0(u_{\lambda_n}) / J(u_{\lambda_n}) \quad (17)$$

其中, 每一次权重  $\lambda_{n+1}$  的取值都是由上一次迭代出的正则项  $J(u_{\lambda_n})$  和逼近项  $E_0(u_{\lambda_n})$  两者决定。文中通过测试不同图像在不同噪声强度下的数据, 采用多元线性回归拟合的方法拟合出参数  $w$  与权重  $\lambda$ , 结构相似性 SSIM, 正则项  $E$  和逼近项  $J$  之间的函数关系式, 使得参数  $w$  在迭代过程中随着权重  $\lambda$  的迭代而选择不同的值, 部分测试数据如表1。

根据多元线性回归模型, 拟合出参数  $w$  的函数关系式, 结果如表2。

表1 测试实验数据  
Tab. 1 Experimentalttest data

图像	Chambolle模型合理值			反推 $w$ 值		
	方差	权重 $\lambda$ 合理值	结构相似性	正则项 $E$	逼近项 $J$	$w$
Man	13	7.50	0.619 4	28 743.438 1	8 921 250.647 8	23 28
	21	14.5	0.520 1	45 808.044 4	8 089 105.556 8	2 561
	23	17.0	0.501 9	48 698.120 7	7 626 488.228 2	2 662
	25	18.0	0.484 8	54 459.800 1	7 984 144.222 0	2 639
	27	20.5	0.470 9	57 081.515 7	7 631 988.755 2	2 741
	29	21.5	0.457 3	61 514.413 1	8 014 643.618 3	2 801
	31	22.5	0.442 1	67 288.985 9	8 381 634.551 2	2 803
Camera man	14	17.0	0.497 8	21 198.115 2	3 241 190.391 5	2 599
	16	21.5	0.475 3	22 325.421 7	3 154 342.132 7	3 038
	18	22.5	0.449 9	26 395.183 5	3 300 412.708 8	2 813
	20	23.0	0.429 6	31 078.488 0	3 500 484.158 6	2 591
	22	26.5	0.412 5	33 010.497 9	3 485 482.347 7	2 798
	24	28.5	0.397 4	36 521.681 2	3 575 216.027 3	2 790
	26	30.0	0.378 1	40 503.397 7	3 723 314.926 9	2 758
	28	32.0	0.365 9	43 960.698 0	3 828 219.610 8	2 787

表2 拟合系数  
Tab. 2 Fitting coefficients

常数项系数	权重 $\lambda$ 系数	结构相似性系数	正则项系数	逼近项系数
3 670.415 7	7.982 9	2 837.496 7	-0.004 8	6.444 2e <sup>-5</sup>

即模型的函数关系式为

$$w^{n+1} = 3\ 670.415\ 7 + 7.982\ 9\lambda^n + 2\ 837.496\ 7\text{SSIM}^n - 0.004\ 87E^n + 6.444\ 2e^{-5}J^n \quad (18)$$

回归系数的95%的置信区间估计见表3。由表3可看出该线性拟合中  $F$  检验的  $P$  值为  $1.317\ 2e^{-17}$ , 远远小于0.01, 通过了显著性检验, 说明该拟合模型是有效的。

### 2.3 算法流程

步骤1 初始化:  $\lambda, w, n$

步骤2 1) 根据  $\lambda \text{div} p$  算出投影算子,

$E = \|u - f\|^2 / (2\lambda)$  算出逼近项;

2) 得到去噪后图像  $u$ , 算出  $u$  的梯度、正则项数值和结构相似性;

3) 根据  $w$  的拟合公式(式(18)), 算出  $w$ ;

4) 根据  $w$ , 算出  $\lambda$  值;

5) 令  $n = n + 1$ , 将  $\lambda$  代入1), 再次循环。

步骤3 输出  $u$ , 结束。

表3 拟合模型检验值

Tab. 3 Test value of fitting model

置信区间估计	回归模型统计量
(3 058.750 9, 4 282.080 5)	0.907 6
(-1.437 0, 17.402 8)	86.035 5
(-3 785.324 9, -1 889.668 6)	1.317 2e <sup>-17</sup>
(-0.010 6, 0.000 8)	18 489.188 8

## 3 数值实验与分析

选用4幅灰度级为0~255的256×256的图像, 分别利用Chambolle对偶投影方法<sup>[9-10]</sup>和本文提出的自适应对偶投影方法进行验证, 同时在结构相似性、峰值信噪比等方面进行对比和分析, 见图1。



图1 去噪效果图

Fig. 1 Denoising effect images

由图1可看出,无论对于高斯白噪声还是泊松噪声,实验后的图像效果要比噪声图像清晰很多,说明了算法改进的可行性。每组实验的图像相似结构性SSIM和峰值信噪比PSNR,分别和Chambolle合理值进行对比。Chambolle合理值的获得,是通过人工测试调整,在图像取不同参数时算出此时图像的结构相似性SSIM和峰值信噪比PSNR。当这两个指标最大时,同时参考主观上对图像去噪的视觉效果,将此时的SSIM和PSNR数值视为Chambolle算法的合理值,结果如图2。从图2可以看出,当图像方差较小时,图像Man经该算法处理后的结构相似性和合理值相比有些差距,但相差是比较小的,当噪声方差大于25时,经过改进后算法结构相似性与合理值比较吻合。图像Camera man则无论噪声方差大小,经本文算法处理后其结构相似性和峰值信噪比都与合理值几乎重合,吻合度较高,从而进一步说明了改进后算法的合理性和可行性。从图像Camera man实验效果图来看,无论是对于高斯白噪声还是泊松噪声,经该算法去噪后的效果较好,在图像

纹理和细节部分也能够较好的保护,避免了由于原算法中权重的主观选取而导致图像过于光滑和去噪不彻底的弊端,同时,算出了每组实验的峰值信噪比与合理值进行对比,结果如图3。从图3可以看出,改进算法后的图像Man峰值信噪比与合理值相差较小,从总体上看,相差的数值也相对较小。图像Camera man的峰值信噪比与合理值很接近,几乎重合,其去噪效果较好。

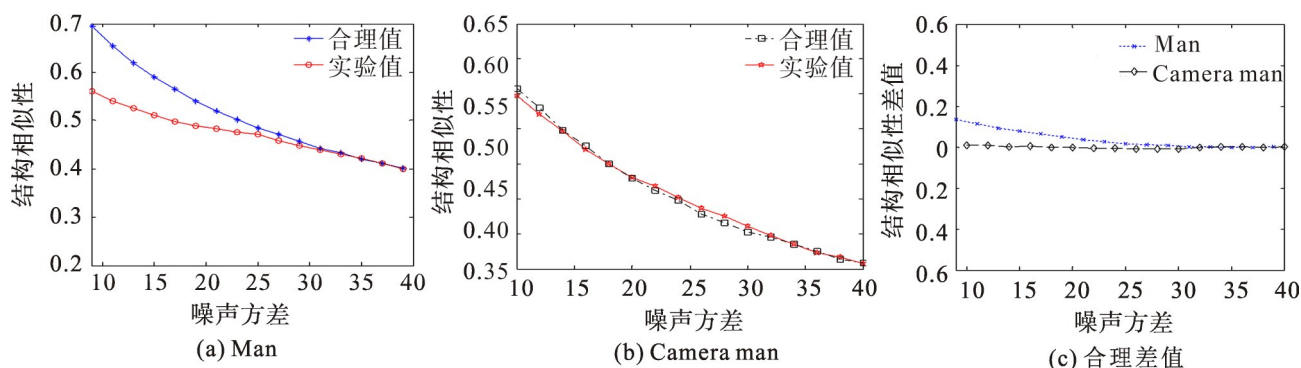


图2 图像Man和Camea man的结构相似性及其合理差值

Fig. 2 SSIM and their resonable difference of image Man and Camea man

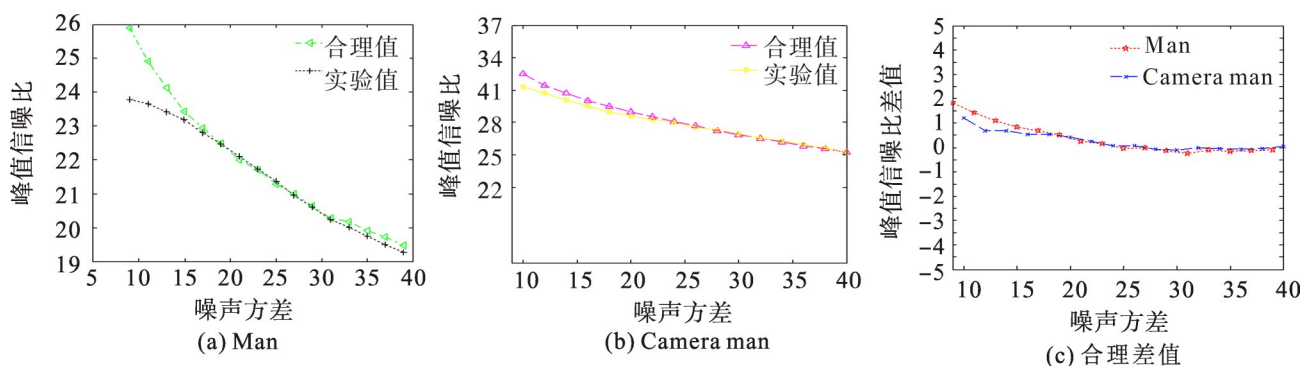


图3 图像Man和Camera man的峰值信噪比及其合理差值

Fig. 3 PSNR and their resonable difference of image Man and Camera man

从主观上可以看出,经本文算法选取参数后进行的去噪效果较好;对不同方差、不同噪声、不同图像都比较适用,避免了在图像去噪时参数选取盲目性的问题。为从客观上进行分析,算出每张实验图像的峰值信噪比,将这个指标和合理值进行对比,结果如表4。

表4 各图像PSNR与合理值对比

Tab. 4 Comparison of PSNR with reasonable values for each image

图像	方差	本文λ取值	PSNR	PSNR合理值	相差值
Peppers	5.00	32.50	29.50	31.24	1.74
	13.00	35.25	28.80	30.20	1.40
Man	15.00	17.14	22.61	22.90	0.29
	23.00	24.16	20.86	21.75	0.89
Camera man	13.00	23.76	30.38	30.97	0.59
	10.00	19.79	31.15	32.04	0.89
Baboo	23.00	31.31	20.55	21.26	0.71
	16.00	29.83	20.78	21.91	1.13
Boat	9.00	17.76	28.60	28.22	-0.38
	18.00	32.41	26.38	26.96	0.58
Elain	15.00	41.08	29.08	29.50	0.42
	6.00	72.21	28.91	30.38	1.47

从表4可以看出,经自适应选取参数得到的PSNR与合理值非常接近,这就避免了对偶算法中权重主观选取的弊端,有效避免了权重选取过大或者过小的问题,节省了大量测试时间,同时该算法在去噪效果上也是比较好的,具有一定的实际应用价值。

## 4 结 论

针对全变差去噪模型,首先分析ROF模型的去噪机理,阐述Chambolle对偶原理,利用该算模型求解全变分去噪模型时速度更快,收敛性较好。针对该模型中逼近项和正则项之间的参数选择问题,提出了一种基于能量泛函最小的自适应调整参数方法,弥补了一些传统数值算法中不能对权重进行调整的缺陷。同时通过对不同图像添加不同方差的高斯白噪声和泊松噪声进行仿真实验,从结构相似性、峰值信噪比等方面与合理值进行对比。结果表明,该算法的各项去噪量化指标均可达到较好水平,从而解决了Chambolle对偶算法中参数的主观选取的弊端,提高了图像去噪的效率,具有较好的实际价值。

### 参考文献:

- [1] RUDIN L I, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1992, 60(1):259–268.
- [2] MEYER Y. Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations: the Fifteenth Dean Jacqueline B Lewis Memorial Lectures[M]. Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 2001:22–122.
- [3] BUADES A, COLL B, MOREL J M. Image denoising by non-local averaging[C]// *IEEE International Conference on Acoustics*. Philadelphia, 2005.
- [4] BRAS N B, BIOUCAS-DIAS J, MARTINS RC. An alternating direction algorithm for total variation reconstruction distributed parameters[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, 21(26):3004–3016.
- [5] ZHANG X, BURGER M, OSHER S. A unified primal-dual algorithm framework based on bregman iteration[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2011, 46(1):20–46.
- [6] XU X, BU T. An adaptive parameter choosing approach for regularization model[J]. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2018, 32(8):1859013.
- [7] DONG Y, HINTERMÜLLER M, RINCON-CAMACHO M M. Automated regularization parameter selection in multi-scale total variation models for image restoration[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2011, 40(1):82–104.
- [8] CLASON C, JIN B, KUNISCH K. A duality-based splitting method for  $e^l$ -TV image restoration with automatic regularization parameter choice[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2010, 32(3):1484–1505.
- [9] WEN Y W, CHAN R H. Parameter selection for total-variation-based image restoration using discrepancy principle[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2011, 21(4):1770–1781.
- [10] CHAN T, MARQUINA A, MULET P. High-order total variation-based image restoration[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2000, 22(2):503–516.
- [11] LIU P. Adaptive image processing: a bilevel structure learning approach for mixed-order total variation regularizers[EB/OL]. [2019-03-19]. <http://arxiv.org/abs/1903.06911v1>.
- [12] 常璐璐,张化朋. 基于自适应全变差的B超图像快速去噪算法[J]. *南京邮电大学学报(自然科学版)*, 2016, 36(5):50–55.
- [13] CHAMBOLLE A. An algorithm for total variation minimization and applications[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, 20(1/2):89–97.
- [14] CHAMBOLLE A. Total variation minimization and a class of binary MRF models[C]// *International Workshop on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005:136–152.
- [15] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 2011, 3(1):1–4.
- [16] 李旭超,宋博. 改进的正则化模型在图像恢复中的应用[J]. *中国图象图形学报*, 2014, 19(12):1730–1742.
- [17] 李旭超,宋博,甘良志. 改进的迭代算法在图像恢复正则化模型中的应用[J]. *电子学报*, 2015, 43(6):1152–1159.

责任编辑:闫芳芳,丁吉海