文章编号:1671-7872(2022)02-0202-08

# 具有周期边界条件的两个Sturm-Liouville问题的交叉谱

张艳霞[a],刘 畅[b]
(安徽工业大学 a. 数理科学与工程学院;b. 计算机科学与技术学院,安徽 马鞍山 243032)

**摘要:**为研究具有周期边界条件的两个Sturm-Liouville (SL)问题的交叉谱个数,构造一个二维向量SL问题使两个一维SL问题的谱集与该二维向量SL问题的谱集相同,计算出二维SL问题的二重特征值的一个上界$M_Q$,得出二维SL问题的大于$M_Q$的特征值都是单特征值,且只有有限个非单特征值;利用一维SL问题与二维向量SL问题谱集之间的关系,得出具有周期边界条件的两个一维SL问题交叉谱(相同特征值)的个数是有限的,得到具有周期边界条件的一维SL问题的二重特征值个数也是有限的,同时计算出最大二重特征值的上界估计。
**关键词:**向量Sturm-Liouville问题;特征值;谱;重数;势函数
**中图分类号:**O 29 **文献标志码:**A **doi:**10.3969/j.issn.1671-7872.2022.02.012

# Intersection of Spectrum for Two Sturm-Liouville Problems with Periodic Boundary Conditions

**ZHANG Yanxia[a], LIU Chang[b]**
(a. School of Mathematics & Physics; b. School of Computer Science & Technology, Anhui University of Technology, Maanshan 243032, China)

**Abstract:** In order to study the intersection of the spectra for two Sturm-Liouville (SL) problems with periodic boundary conditions (BCs), a two-dimensional vectorial SL problem is constructed. In this question the spectral sets of two one-dimensional SL problems are equal to the spectral sets of the two-dimensional vectorial SL problem. Then an upper bound $M_Q$ of the double eigenvalues of the two-dimensional SL problem is calculated. It is concluded that the eigenvalues greater than $M_Q$ of two-dimensional SL problem are single eigenvalues, and there are only a limited number of non single eigenvalues. Using the relationship between the spectral set of one-dimensional SL problem and two-dimensional vectorial SL problem, it is obtained that the number of cross spectra (same eigenvalues) of two one-dimensional SL problems with periodic BCs is limited, and the number of double eigenvalues of one-dimensional SL problem with periodic BCs is also limited. At the same time, the upper bound estimation of the maximum double eigenvalues is calculated.
**Key words:** vectorial Sturm-Liouville problem; eigenvalue; spectrum; multiplicity; potential function

Sturm-Liouville问题是研究波动方程、热传导方程、拉普拉斯方程定解问题的基础,在工程结构的振动和稳定性分析中用以确定杆的自振频率和临界载荷(频率是特征值);在量子力学中用以求氢原子在有心力场

**收稿日期:**2021-01-08
**基金项目:**安徽省高校自然科学基金项目(TZJQR002-2021)
**作者简介:**张艳霞(1980—),女,山东邹城人,副教授,主要研究方向为常微分方程与常微分算子。
**引文格式:**张艳霞,刘畅.具有周期边界条件的两个Sturm-Liouville问题的交叉谱[J].安徽工业大学学报(自然科学版),2022, 39(2):202-209.

作用下电离所需的最小能量,在大气物理学中用以确定在地球自旋作用下纬向气流的波动频率、弹性碰撞问题。此外,治疗冠心病的心脏支架技术以及金融数学中期权定价等问题也涉及到某个自伴SL算子的特征值问题。SL问题一直是科研工作者研究的热点[1-7]。

本文研究由如下二阶微分方程(1)和周期边界条件(2)构成的两个SL问题:

$$y''(x) + (\lambda - q_i(x))y(x) = 0, i = 1,2, x \in [0,1] \tag{1}$$

$$y(1) = y(0), y'(1) = y'(0) \tag{2}$$

其中$q_i(x)$是[0,1]上的连续函数。对于给定的势函数$q_i(x)$,上述两个SL问题的谱都是特征值,并且是实特征值有下界,有可能出现二重特征值,其特征值形如[8]:$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots$。如果上述两个SL问题的谱集合是相同的,则这两个SL问题称为谱同构[9-10];如果上述两个SL问题不是谱同构的,那会有多少个相同谱(特征值)?文献[11]中给出了具有Dirichlet边界条件(3)的两个SL方程相同谱问题:

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{3}$$

文献[12]把这一问题推广到具有一般分离型边界条件(4)的两个SL方程上。

$$\begin{cases} y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0, 0 \leqslant \alpha < \pi \\ y(1)\cos\beta - y'(1)\sin\beta = 0, 0 < \beta \leqslant \pi \end{cases} \tag{4}$$

文献[11-12]都是借助某个具有分离型边界条件的二维向量SL问题谱的特点以及二重特征值个数,来研究两个一维SL方程的相同谱问题,但是对带混合型边界条件的两个一维SL方程的相同谱问题没有给出结论。带有分离型边界条件的一维SL问题的特征值都是单的,带有周期混合边界条件的一维SL问题会出现二重特征值,二重特征值有多少个?最大二重特征值的上界是多少?两个一维SL问题相同的特征值有多少个? 这些问题还没有相关结论,文中针对这些问题进行研究,并给出相关结论。

## 1 二维向量Sturm-Liouville问题的特征值

考虑如下具有周期混合边界条件的二维向量SL问题:

$$\vec{Z}''(x) + (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}(x))\vec{Z}(x) = 0, x \in [0,1] \tag{5}$$

$$\vec{Z}(1) = \vec{Z}(0) \tag{6}$$

$$\vec{Z}'(1) = \vec{Z}'(0) \tag{7}$$

其中:$\boldsymbol{I}$为二阶单位矩阵;$\vec{Z}(x)$为二维向量函数;$\boldsymbol{Q}(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & -r(x) \\ -r(x) & p_2(x) \end{pmatrix}$,为[0,1]上的对称矩阵函数;$p_1(x)$,$p_2(x)$为[0,1]上的连续函数;$r(x)$为在[0,1]上具有连续的导函数。

为研究具有周期混合边界条件的二维向量SL问题特征值的重数,设$\vec{\phi}_1(x) = (\phi_{11}(x), \phi_{21}(x))^{\mathrm{T}}$,$\vec{\phi}_2(x) = (\phi_{12}(x), \phi_{22}(x))^{\mathrm{T}}$,$\vec{\psi}_1(x) = (\psi_{11}(x), \psi_{21}(x))^{\mathrm{T}}$,$\vec{\psi}_2(x) = (\psi_{12}(x), \psi_{22}(x))^{\mathrm{T}}$是二维向量微分方程(5)的4个解,且分别满足初始条件:$\vec{\phi}_1(0) = (1,0)^{\mathrm{T}}$,$\vec{\phi}_1{}'(0) = (0,0)^{\mathrm{T}}$,$\vec{\phi}_2(0) = (0,1)^{\mathrm{T}}$,$\vec{\phi}_2{}'(0) = (0,0)^{\mathrm{T}}$,$\vec{\psi}_1(0) = (0,0)^{\mathrm{T}}$,$\vec{\psi}_1{}'(0) = (1,0)^{\mathrm{T}}$,$\vec{\psi}_2(0) = (0,0)^{\mathrm{T}}$,$\vec{\psi}_2{}'(0) = (0,1)^{\mathrm{T}}$,则$\vec{\phi}_1(x)$,$\vec{\phi}_2(x)$,$\vec{\psi}_1(x)$,$\vec{\psi}_2(x)$是线性无关的,且二维向量微分方程(5)的任意解$\vec{Z}(x)$都可表示为

$$\vec{Z}(x) = a_1\vec{\phi}_1(x) + a_2\vec{\phi}_2(x) + b_1\vec{\psi}_1(x) + b_2\vec{\psi}_2(x) = \boldsymbol{\Phi}(x,\lambda)\vec{a} + \boldsymbol{\Psi}(x,\lambda)\vec{b} \tag{8}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}(x,\lambda) = (\vec{\phi}_1(x), \vec{\phi}_2(x)), \boldsymbol{\Psi}(x,\lambda) = (\vec{\psi}_1(x), \vec{\psi}_2(x)) \tag{9}$$

且$\boldsymbol{\Phi}(0,\lambda) = \boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{\Phi}'(0,\lambda) = \boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{\Psi}(0,\lambda) = \boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{\Psi}'(0,\lambda) = \boldsymbol{I}$,$\vec{a} = (a_1, a_2)^{\mathrm{T}}$,$\vec{b} = (b_1, b_2)^{\mathrm{T}}$。

**引理1** 设$\boldsymbol{\Phi}(x,\lambda)$,$\boldsymbol{\Psi}(x,\lambda)$的定义如式(9),令

$$\boldsymbol{\omega}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}(1,\lambda) - \boldsymbol{I} & \boldsymbol{\Psi}(1,\lambda) \\ \boldsymbol{\Phi}'(1,\lambda) & \boldsymbol{\Psi}'(1,\lambda) - \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \tag{10}$$

则$\lambda$是二维向量Sturm-Liouville问题(5)~(7)特征值的充分必要条件是$\omega(\lambda) = 0$。

**证明** 该引理的证明可参见文献[13]。

**引理2** 设 $\boldsymbol{\Phi}(x,\lambda),\boldsymbol{\Psi}(x,\lambda)$ 的定义如式(9)，$\lambda$ 是二维向量SL问题(5)~(7)的特征值，则特征值 $\lambda$ 的重数与线性代数系统式(11)的线性无关的向量个数是相等的。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}(1,\lambda)-\mathrm{I} & \boldsymbol{\Psi}(1,\lambda) \\ \boldsymbol{\Phi}'(1,\lambda) & \boldsymbol{\Psi}'(1,\lambda)-\boldsymbol{I} \end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0} \tag{11}$$

**证明** 假设线性代数系统式(11)有两个线性无关的解向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4)^{\mathrm{T}}$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3,b_4)^{\mathrm{T}}$，令 $\vec{Z}_1(x)=a_1\vec{\phi}_1(x)+a_2\vec{\phi}_2(x)+a_3\vec{\psi}_1(x)+a_4\vec{\psi}_2(x)$，$\vec{Z}_2(x)=b_1\vec{\phi}_1(x)+b_2\vec{\phi}_2(x)+b_3\vec{\psi}_1(x)+b_4\vec{\psi}_2(x)$。则 $\vec{Z}_1(x),\vec{Z}_2(x)$ 线性无关，且 $\vec{Z}_1(x),\vec{Z}_2(x)$ 满足方程(5)和边界条件(6)，(7)。即 $\lambda$ 是二维向量SL问题(5)~(7)的二重特征值，且 $\vec{Z}_1(x),\vec{Z}_2(x)$ 是对应于 $\lambda$ 的两个线性无关的特征向量。

反之，设 $\lambda$ 是二维向量SL问题(5)~(7)的二重特征值，且 $\vec{Z}_1(x),\vec{Z}_2(x)$ 是对应于 $\lambda$ 的两个线性无关的特征向量，则存在两个线性无关的向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4)^{\mathrm{T}}$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3,b_4)^{\mathrm{T}}$，使得 $\vec{Z}_1(x)=a_1\vec{\phi}_1(x)+a_2\vec{\phi}_2(x)+a_3\vec{\psi}_1(x)+a_4\vec{\psi}_2(x)$，$\vec{Z}_2(x)=b_1\vec{\phi}_1(x)+b_2\vec{\phi}_2(x)+b_3\vec{\psi}_1(x)+b_4\vec{\psi}_2(x)$。令 $\vec{c}_1=(a_1,a_2)^{\mathrm{T}}$，$\vec{c}_2=(a_3,a_4)^{\mathrm{T}}$，$\vec{d}_1=(b_1,b_2)^{\mathrm{T}}$，$\vec{d}_2=(b_3,b_4)^{\mathrm{T}}$，则 $\vec{Z}_1(x)=\boldsymbol{\Phi}(x,\lambda)\vec{c}_1+\boldsymbol{\Psi}(x,\lambda)\vec{c}_2$，$\vec{Z}_2(x)=\boldsymbol{\Phi}(x,\lambda)\vec{d}_1+\boldsymbol{\Psi}(x,\lambda)\vec{d}_2$。由于 $\vec{Z}_1(x),\vec{Z}_2(x)$ 满足边界条件(6)，(7)，可得 $\vec{a},\vec{b}$ 是线性代数系统式(11)的两个线性无关的解向量。

**注1** $\vec{\psi}_1(x),\vec{\psi}_2(x)$ 线性无关，得 $\mathrm{Rank}\boldsymbol{\Psi}(1,\lambda)=2$，因此 $\mathrm{Rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}(1,\lambda)-\boldsymbol{I} & \boldsymbol{\Psi}(1,\lambda) \\ \boldsymbol{\Phi}'(1,\lambda) & \boldsymbol{\Psi}'(1,\lambda)-\boldsymbol{I} \end{pmatrix}\geqslant 2$，由引理2得二维向量SL问题(5)~(7)的特征值会出现一重(单特征值)、二重特征值。

**引理3**[14] 设 $f(x)\in L[a,b]$，则

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x=0$$

且

$$\lim_{|\alpha|\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\alpha x\mathrm{d}x=0,\ \lim_{|\alpha|\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x=0$$

**引理4** 设 $\lambda$ 是二维向量SL问题(5)~(7)的二重特征值，$\vec{Z}_1(x,\lambda)=(z_{11}(x,\lambda),z_{21}(x,\lambda))^{\mathrm{T}}$，$\vec{Z}_2(x,\lambda)=(z_{12}(x,\lambda),z_{22}(x,\lambda))^{\mathrm{T}}$ 是对应于 $\lambda$ 的两个线性无关的特征向量，则

$$\int_0^1 r(x)(z_{11}(x,\lambda)z_{22}(x,\lambda)-z_{12}(x,\lambda)z_{21}(x,\lambda))\mathrm{d}x=0 \tag{12}$$

**证明** 寻找一个常数 $M$，证明二维向量SL问题(5)~(7)的大于该常数 $M$ 的特征值都是单特征值，于是可得非单特征值的个数是有限个。

首先，借助如下矩阵微分方程[15]

$$\boldsymbol{Y}''(x)+(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}(x))\boldsymbol{Y}(x)=0,\quad x\in[0,1] \tag{13}$$

满足如下初始条件

$$\boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{Y}'(0)=\boldsymbol{D} \tag{14}$$

其中：$\boldsymbol{Y}(x)$ 是二阶矩阵函数；$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$，是二阶实矩阵($c_{ij},d_{ij}\in\mathbf{R}$)。定义矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的最大模范数：$\|\boldsymbol{C}\|=\sup\left\{|c_{ij}|:1\leqslant i,j\leqslant 2\right\}$，则 $\|\boldsymbol{CD}\|\leqslant 2\|\boldsymbol{C}\|\|\boldsymbol{D}\|$。

设 $\boldsymbol{Y}(x,\lambda)=\begin{pmatrix} y_{11}(x,\lambda) & y_{12}(x,\lambda) \\ y_{21}(x,\lambda) & y_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix}$ 是初始问题(13)，(14)的解矩阵，则满足如下积分方程[1]

$$\boldsymbol{Y}(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,x\boldsymbol{C}+\frac{\boldsymbol{D}}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}\,x+\int_0^x\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(x-t)}{\sqrt{\lambda}}\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{Y}(t,\lambda)\mathrm{d}t \tag{15}$$

记

$$\boldsymbol{Y}(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}\,x\boldsymbol{C}+\frac{\boldsymbol{D}}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}\,x\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}(x,\lambda) \tag{16}$$

其中

$$\boldsymbol{G}(x,\lambda)=[g_{ij}]_{i,j=1}^{2}=\int_0^x\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(x-t)}{\sqrt{\lambda}}\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{Y}(t,\lambda)\mathrm{d}t \tag{17}$$

给出本文的主要结果：

**定理1**　假设 $\int_0^1 r(x)\mathrm{d}x\neq 0$，令 $Q_*=\int_0^1\|\boldsymbol{Q}(\mathrm{t})\|\mathrm{d}t$，$M_Q=\max\left\{2Q_*,\dfrac{R_*}{\left|\|\det\boldsymbol{C}|-\dfrac{|\det\boldsymbol{D}|}{4Q_*^2}\right|\left|\int_0^1 r(x)\mathrm{d}x\right|}\right\}$，$R_*=(\|\boldsymbol{C}\|^2+\dfrac{\|\boldsymbol{D}\|^2}{4Q_*^2})(|r(1)|+\int_0^1|r'(x)|\mathrm{d}x)+\dfrac{\|\boldsymbol{C}\|\|\boldsymbol{D}\|}{Q_*}(|r(0)|+|r(1)|+\int_0^1|r'(x)|\mathrm{d}x)+16\mathrm{e}^{2}Q_*(\|\boldsymbol{C}\|+\dfrac{\|\boldsymbol{D}\|}{2Q_*})^2\int_0^1\|r(x)|\mathrm{d}x$，若 $\lambda_n$ 是二维向量SL问题(5)~(7)的特征值，且满足 $\sqrt{\lambda_n}>M_Q$，则 $\lambda_n$ 是一重特征值(单特征值)。

**证明**　反证法，假设 $\lambda_n$ 是二维向量SL问题(5)~(7)的二重特征值，且满足 $\sqrt{\lambda_n}>M_Q$，即，$\sqrt{\lambda_n}>2Q_*$ 且 $\sqrt{\lambda_n}>\dfrac{R_*}{\left|\|\det\boldsymbol{C}|-\dfrac{|\det\boldsymbol{D}|}{4Q_*^2}\right|\left|\int_0^1 r(x)\mathrm{d}x\right|}$。

设 $\boldsymbol{y}_1(x,\lambda)=(y_{11}(x,\lambda),y_{21}(x,\lambda))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}_2(x,\lambda)=(y_{12}(x,\lambda),y_{22}(x,\lambda))^{\mathrm{T}}$ 是对应于 $\lambda_n$ 的两个线性无关的特征函数，则 $\boldsymbol{Y}(x,\lambda_n)=\begin{pmatrix}y_{11}(x,\lambda_n) & y_{12}(x,\lambda_n)\\ y_{21}(x,\lambda_n) & y_{22}(x,\lambda_n)\end{pmatrix}$，是矩阵方程(13)的解矩阵，并存在矩阵 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 使得 $\boldsymbol{Y}(x,\lambda_n)$ 满足初始条件(14)。由引理4可得

$$\int_0^1 r(x)\det\boldsymbol{Y}(x,\lambda_n)\mathrm{d}x=0 \tag{18}$$

再由式(15)~(16)得

$$\boldsymbol{Y}(x,\lambda_n)=\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\lambda_n}\,xc_{11}+\dfrac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,x}{\sqrt{\lambda_n}}d_{11}+g_{11} & \cos\sqrt{\lambda_n}\,xc_{12}+\dfrac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,x}{\sqrt{\lambda_n}}d_{12}+g_{12}\\ \cos\sqrt{\lambda_n}\,xc_{21}+\dfrac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,x}{\sqrt{\lambda_n}}d_{21}+g_{21} & \cos\sqrt{\lambda_n}\,xc_{22}+\dfrac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,x}{\sqrt{\lambda_n}}d_{22}+g_{22}\end{pmatrix} \tag{19}$$

因此

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{Y}(x,\lambda_n)=&\det\boldsymbol{C}\frac{1+\cos2\sqrt{\lambda_n}\,x}{2}+(c_{11}d_{22}+d_{11}c_{22}-c_{21}d_{12}-c_{12}d_{21})\frac{\sin2\sqrt{\lambda_n}\,x}{2\sqrt{\lambda_n}}+\\&\det\boldsymbol{D}\frac{1-\cos2\sqrt{\lambda_n}\,x}{2\lambda_n}+f(x,\lambda_n)\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $f(x,\lambda_n)=(c_{11}g_{22}+g_{11}c_{22}-c_{21}g_{12}-c_{12}g_{21})\cos\sqrt{\lambda_n}\,x+(d_{11}g_{22}+g_{11}d_{22}-d_{21}g_{12}-d_{12}g_{21})\dfrac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,x}{\sqrt{\lambda_n}}+$

$g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}$

将式(20)代入式(18)得

$$
\begin{aligned}
-[(\det\boldsymbol{C}+\frac{\det\boldsymbol{D}}{\lambda_n})\int_0^1 r(x)\mathrm{d}x] &= (\det\boldsymbol{C}-\frac{\det\boldsymbol{D}}{\lambda_n})\int_0^1 r(x)\cos 2\sqrt{\lambda_n}\,x\mathrm{d}x + \\
&\frac{(c_{11}d_{22}+d_{11}c_{22}-c_{21}d_{12}-c_{12}d_{21})}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^1 r(x)\sin 2\sqrt{\lambda_n}\,x\mathrm{d}x + 2\int_0^1 r(x)f(x,\lambda_n)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{21}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
|(\det\boldsymbol{C}+\frac{\det\boldsymbol{D}}{\lambda_n}||\int_0^1 r(x)\mathrm{d}x| &\le |\det\boldsymbol{C}-\frac{\det\boldsymbol{D}}{\lambda_n}||\int_0^1 r(x)\cos 2\sqrt{\lambda_n}\,x\mathrm{d}x| + \\
&|\frac{(c_{11}d_{22}+d_{11}c_{22}-c_{21}d_{12}-c_{12}d_{21})}{\sqrt{\lambda_n}}||\int_0^1 r(x)\sin 2\sqrt{\lambda_n}\,x\mathrm{d}x| + 2|\int_0^1 r(x)f(x,\lambda_n)\mathrm{d}x|
\end{aligned} \tag{22}
$$

由分部积分得：

$$
|\int_0^1 r(x)\cos 2\sqrt{\lambda_n}\,x\mathrm{d}x| \le \frac{|r(1)|}{2\sqrt{\lambda_n}} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\int_0^1 |r'(x)|\mathrm{d}x \tag{23}
$$

$$
|\int_0^1 r(x)\sin 2\sqrt{\lambda_n}\,x\mathrm{d}x| \le \frac{|r(0)|+|r(1)|}{2\sqrt{\lambda_n}} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\int_0^1 |r'(x)|\mathrm{d}x \tag{24}
$$

由式(15)可得

$$
\|\boldsymbol{Y}(x,\lambda_n)\| \le \|\boldsymbol{C}\| + \frac{\|\boldsymbol{D}\|}{\sqrt{\lambda_n}} + 2\int_0^x \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\|\boldsymbol{Q}(t)\|\|\boldsymbol{Y}(t,\lambda_n)\|\mathrm{d}t
$$

再由Gronwall's不等式[16],所以

$$
\|\boldsymbol{Y}(x,\lambda_n)\| \le (\|\boldsymbol{C}\| + \frac{\|\boldsymbol{D}\|}{\sqrt{\lambda_n}})\exp\left\{\int_0^x \frac{2}{\sqrt{\lambda_n}}\|\boldsymbol{Q}(t)\|\mathrm{d}t\right\} \tag{25}
$$

再利用式(16),(17)及$\sqrt{\lambda_n} > 2Q_*$可得当$1 \le i,j \le 2$时,

$$
|g_{ij}(x,\lambda_n)| \le (\|\boldsymbol{C}\| + \frac{\|\boldsymbol{D}\|}{\sqrt{\lambda_n}})\left[\exp\left\{\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{\lambda_n}}\|\boldsymbol{Q}(t)\|\mathrm{d}t\right\} - 1\right] \tag{26}
$$

由不等式$e^x - 1 \le xe, x \in [0,1]$,所以

$$
|g_{ij}(x,\lambda_n)| \le (\|\boldsymbol{C}\| + \frac{\|\boldsymbol{D}\|}{\sqrt{\lambda_n}})\frac{2e}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^1 \|\boldsymbol{Q}(t)\|\mathrm{d}t = (\|\boldsymbol{C}\| + \frac{\|\boldsymbol{D}\|}{\sqrt{\lambda_n}})\frac{2eQ_*}{\sqrt{\lambda_n}} \tag{27}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
|f(x,\lambda_n)| &\le 4\|\boldsymbol{C}\|\|\boldsymbol{C}\| + 4\frac{\|\boldsymbol{D}\|\|\boldsymbol{G}\|}{\sqrt{\lambda_n}} + 2\|\boldsymbol{G}\|^2 \le (\|\boldsymbol{C}\| + \frac{\|\boldsymbol{D}\|}{\sqrt{\lambda_n}})^2\frac{8eQ_*}{\sqrt{\lambda_n}} + \\
&(\|\boldsymbol{C}\| + \frac{\|\boldsymbol{D}\|}{\sqrt{\lambda_n}})^2\frac{8e^2{Q_*}^2}{\sqrt{\lambda_n}} \le (\|\boldsymbol{C}\| + \frac{\|\boldsymbol{D}\|}{\sqrt{\lambda_n}})^2\frac{8e^2Q_*}{\sqrt{\lambda_n}}
\end{aligned} \tag{28}
$$

结合式(22)~(24)、式(28)及$\sqrt{\lambda_n} > 2Q_*$可得

$$\begin{aligned}&|\det\boldsymbol{C}+\frac{\det\boldsymbol{D}}{\lambda_n}||\int_0^1 r(x)\mathrm{d}x|\leqslant(\|\boldsymbol{C}\|^2+\frac{\|\boldsymbol{D}\|^2}{\lambda_n})\frac{|r(1)|+\int_0^1|r'(x)|\mathrm{d}x}{\sqrt{\lambda_n}}+\\&\frac{2\|\boldsymbol{C}\|\|\boldsymbol{D}\|}{\sqrt{\lambda_n}}\frac{|r(0)|+|r(1)|+\int_0^1|r'(x)|\mathrm{d}x}{\sqrt{\lambda_n}}+(\|\boldsymbol{C}\|+\frac{\|\boldsymbol{D}\|}{\sqrt{\lambda_n}})^2\frac{16\mathrm{e}^2Q_*}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^1|r(x)|\mathrm{d}x\leqslant\\&\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}[(\|C\|^2+\frac{\|\boldsymbol{D}\|^2}{4Q_*^2})(|r(1)|+\int_0^1|r'(x)|\mathrm{d}x)+\frac{\|\boldsymbol{C}\|\|\boldsymbol{D}\|}{Q_*}(|r(0)|+|r(1)|+\int_0^1|r'(x)|\mathrm{d}x)+\\&16\mathrm{e}^2Q_*(\|\boldsymbol{C}\|+\frac{\|\boldsymbol{D}\|}{2Q_*})^2\int_0^1|r(x)|\mathrm{d}x]=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}R_*\end{aligned}\tag{29}$$

其　　中　$R_*=(\|\boldsymbol{C}\|^2+\frac{\|\boldsymbol{D}\|^2}{4Q_*^2})(|r(1)|+\int_0^1|r'(x)|\mathrm{d}x)+\frac{\|\boldsymbol{C}\|\|\boldsymbol{D}\|}{Q_*}(\||r(0)|+|r(1)|+\int_0^1|r'(x)|\mathrm{d}x)+16\mathrm{e}^2Q_*(\|\boldsymbol{C}\|+\frac{\|\boldsymbol{D}\|}{2Q_*})^2\int_0^1\||r(x)|\mathrm{d}x$。由绝对值不等式、式(29)及$\sqrt{\lambda_n}>2Q_*$推得

$$\begin{aligned}&||\det\boldsymbol{C}|-\frac{|\det\boldsymbol{D}|}{4Q_*^2}||\int_0^1 r(x)\mathrm{d}x|\leqslant||\det\boldsymbol{C}|-\frac{|\det\boldsymbol{D}|}{\lambda_n}||\int_0^1 r(x)\mathrm{d}x|\leqslant\\&|\det\boldsymbol{C}+\frac{\det\boldsymbol{D}}{\lambda_n}||\int_0^1 r(x)\mathrm{d}x|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}R_*<||\det\boldsymbol{C}|-\frac{|\det\boldsymbol{D}|}{4Q_*^2}||\int_0^1 r(x)\mathrm{d}x|\end{aligned}\tag{30}$$

矛盾。

**定理2**　若$\int_0^1 r(x)\mathrm{d}x\neq 0$,则二维向量SL问题(5)~(7)只有有限个非单的特征值。

**证明**　二维向量SL问题(5)~(7)有可数个实特征值,且这些特征值有下界,可排列成如下形式[15]

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots$$

由定理1得,若存在某个整数$n$使$\sqrt{\lambda_n}>M_Q$,则$\lambda_n$是单特征值,其中$M_Q$如定理1。于是可得二维向量SL问题(5)~(7)的最大的非单特征值$\lambda\leqslant M_Q^2$,且非单特征值的最大个数是$n-1$。

## 2　两个一维Sturm-Liouville方程的交叉谱问题

为研究具有周期边界条件的两个一维SL方程(1),(2)的交叉谱问题。对于势函数$q_i(x)$,记$\sigma(q_i)$表示一维SL方程(1),(2)的谱集;$\sigma(\boldsymbol{Q})$表示二维向量SL问题(5)~(7)的谱集。令

$$\boldsymbol{Q}_\theta(x)=\begin{pmatrix}q_1\cos^2\theta+q_2\sin^2\theta & (q_1-q_2)\sin\theta\cos\theta\\(q_1-q_2)\sin\theta\cos\theta & q_2\cos^2\theta+q_1\sin^2\theta\end{pmatrix}\tag{31}$$

其中$\theta$是一个常数。

**定理3**　设$q_1(x),q_2(x)$是定义在[0,1]上的两个实值连续函数,若

$$\int_0^1 q_1(x)\mathrm{d}x\neq\int_0^1 q_2(x)\mathrm{d}x\tag{32}$$

则谱集$\sigma(q_1)$和$\sigma(q_2)$中相同谱的个数是有限的。

**证明**　在方程(5)中令$\boldsymbol{Q}(x)=\boldsymbol{Q}_\theta(x)$,即$r(x)=(q_2-q_1)\sin\theta\cos\theta$,$p_1(x)=q_1\cos^2\theta+q_2\sin^2\theta$,$p_2(x)=q_2\cos^2\theta+q_1\sin^2\theta$,其中$\theta$是一个常数且$\sin\theta\cos\theta\neq 0$。

证明如下结论

$$\sigma(\boldsymbol{Q}_\theta)=\sigma(q_1)\cup\sigma(q_2)\tag{33}$$

一方面,假设$\lambda_0\in\sigma(q_1)\cup\sigma(q_2)$,则$\lambda_0\in\sigma(q_1)$或者$\lambda_0\in\sigma(q_2)$。不妨设$\lambda_0\in\sigma(q_1)$,$y_1$是对应的特征函

数,则$y_1$满足如下方程

$$y'' + (\lambda_0 - q_1)y = 0, y(1) = y(0), y'(1) = y'(0) \tag{34}$$

于是可得

$$\begin{aligned} y_1'' + (\lambda_0 - p_1)y_1 + r(x)y_1\tan\theta &= y_1'' + (\lambda_0 - q_1\cos^2\theta - q_2\sin^2\theta)y_1 + (q_2 - q_1)\sin\theta\cos\theta y_1\tan\theta = \\ & y_1'' + \lambda_0 y_1 - q_1 y_1 = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

$$y_1''\tan\theta + r(x)y_1 + \lambda_0 y_1\tan\theta - p_2 y_1\tan\theta = [y_1'' + \lambda_0 y_1 - q_1 y_1]\tan\theta = 0 \tag{36}$$

令$\vec{Z}(x) = (y_1(x), y_1(x)\tan\theta)^T$,由式(35)~(36)可得,当$\lambda = \lambda_0, \boldsymbol{Q}(x) = \boldsymbol{Q}_\theta(x)$时,$\vec{Z}(x)$满足式(5)~(7),所以$\lambda_0 \in \sigma(\boldsymbol{Q}_\theta)$,即

$$\sigma(q_1) \cup \sigma(q_2) \subset \sigma(\boldsymbol{Q}_\theta) \tag{37}$$

另一方面,若$\lambda_0 \in \sigma(\boldsymbol{Q}_\theta)$,设$\vec{Z}(x) = (z_1(x), z_2(x))^{\mathrm{T}}$是对应的特征函数,即

$$z_1'' + (\lambda_0 - q_1\cos^2\theta - q_2\sin^2\theta)z_1 + (q_2 - q_1)\sin\theta\cos\theta z_2 = 0 \tag{38}$$

$$z_2'' + (q_2 - q_1)\sin\theta\cos\theta z_1 + (\lambda_0 - q_2\cos^2\theta - q_1\sin^2\theta)z_2 = 0 \tag{39}$$

可得

$$z_1'' + \lambda_0 z_1 - q_1 z_1 + (q_1 - q_2)\sin^2\theta(z_1 - z_2\cot\theta) = 0 \tag{40}$$

$$z_2'' + \lambda_0 z_2 - q_2 z_2 + (q_2 - q_1)\sin^2\theta(z_2 + z_1\cot\theta) = 0 \tag{41}$$

由式(40),令$z_2 = z_1\tan\theta$,则有$z_1'' + \lambda_0 z_1 - q_1 z_1 = 0$,即$\lambda_0 \in \sigma(q_1)$。由式(41),令$z_1 = -z_2\tan\theta$,则有$z_2'' + \lambda_0 z_2 - q_2 z_2 = 0$,即$\lambda_0 \in \sigma(q_2)$。因此

$$\sigma(\boldsymbol{Q}_\theta) \subset \sigma(q_1) \cup \sigma(q_2) \tag{42}$$

由式(37)和(42),可得式(33)成立。

设$\lambda \in \sigma(q_1) \cap \sigma(q_2)$,由式(33)可得$\lambda$在集合$\sigma(\boldsymbol{Q}_\theta)$中是非单特征值。再由式(32)可得

$$\int_0^1 r(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (q_2 - q_1)\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}x \neq 0$$

由定理2知,当$\boldsymbol{Q}(x) = \boldsymbol{Q}_\theta(x)$时,二维向量SL问题(5)~(7)只有有限个非单特征值。因此可得$\sigma(q_1) \cap \sigma(q_2)$是有限集。

**定理4** 设$q_1(x), q_2(x)$是定义在[0,1]上的两个实值连续函数,且式(32)成立,则$\sigma(q_1)$和$\sigma(q_2)$中二重特征值的个数是有限个,且最大的二重特征值$\lambda_n \leqslant M_Q^2$,其中$M_Q$如定理1。

**证明** 假设$\lambda$在$\sigma(q_1)$或者$\sigma(q_2)$中是二重特征值,由式(33)可得,$\lambda$在$\sigma(\boldsymbol{Q}_\theta)$中是非单特征值,由定理2的结论知二维向量SL问题(5)~(7)的非单特征值是有限个,所以$\sigma(q_1)$和$\sigma(q_2)$中的二重特征值的个数是有限个。再由定理1,若$\sqrt{\lambda_n} > M_{Q_\theta}$,则$\lambda_n$在$\sigma(\boldsymbol{Q}_\theta)$中是单特征值,则$\lambda_n$在$\sigma(q_1)$或$\sigma(q_2)$中最大的二重特征值$\lambda_N \leqslant M_{Q_\theta}^2$。

## 3 结　论

研究具有周期边界条件的两个SL问题的交叉谱个数。由定理1计算出二维向量SL问题的二重特征值的一个上界,由定理2得出二维SL问题的大于该上界的特征值都是单特征值,且只有有限个非单特征值。定理3中构造了一个二维向量SL问题使得两个一维SL问题的谱集与该二维向量SL问题的谱集相同,利用一维SL问题与二维向量SL问题谱集之间的关系,得出具有周期边界条件的两个一维SL问题交叉谱(相同特征值)的个数是有限个。由定理4得出具有周期边界条件的一维SL问题的二重特征值是有限个,及最大二重特征值的上界估计。

**参考文献:**

[1] AGRANOVICH Z S, MARCHENKO V A. The Inverse problem of Scattering Theory[M]. New York: Cordon and Breach, 1963: 30-85.

[2] WEIDMANN J. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators[M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1987:1−85.
[3] CHELKAK D, KOROTYAEV E. Parametrization of the isospectral set for the vector-valued Sturm-Liouville problem[J]. Journal of Functional Analysis, 2006, 241:359−373.
[4] GOHBERG I C, KREIN M G. Theory an Application of Volterra Operators in Hilbert Space[M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1970:30−35.
[5] WANG Z, WU H. The index problem for eigenvalues for coupled boundary conditions and Fulton's conjecture[J]. Monatshefte Fur Mathematik, 2009, 157:177−191.
[6] BINDING P A, VOLKMER H. Interlacing and oscillation for Sturm-Liouville problems with separated and coupled boundary conditions[J]. Journal of Computing Application, 2006, 194:75−93.
[7] 扬传富,黄振友. $n$维向量Sturm-Liouville算子的正则迹及其在反谱中的应用[J]. 应用泛函分析学报,2010, 12(2):137−142.
[8] ZETTL A. Sturm-Liouville Theory[M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010:1−95.
[9] JODEIT M, LEVITAN B M. Isospectal vector-valued Sturm-Liouville problems[J]. Letters Mathematical Physics, 1998, 43(2): 117−122.
[10] CHELKAK D, KOROTYAEV E. Parametrization of the isospectral set of the vector-valued Sturm-Liouville problem[J]. Journal of Functional Analysis, 2006, 241:359−373.
[11] SHEN C L, SHIEN C T. On the multiplicity of a vectorial Sturm-Liouville differential equation and some related spectral problems[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1999, 127(10):2943−2952.
[12] YANG C F, HUANG Z Y, YANG X P. The multiplicity of spectra of a vectorial Sturm-Liouville differential equation of dimension two and some applications[J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2007, 37(4):1379−1398.
[13] CHANANE B. Eigenvalues of vectorial Sturm-Liouville problems with parameter dependent boundary conditions[J]. Abstract and Applied Analysis, 2015(1/2/3):1−9.
[14] GRADSHTEYN I S, RYZHIK I M. Tables of Integrals, Series, and Products[M]. 5th ed. San Diego: Academic Press, 1979:24−97.
[15] ATKINSON F V. Discrete and Continuous Boundary Values Problems[M]. New York: Academic Press, 1968:1−120.
[16] BELLMANE R. The stability of solutions of linear differential equations[J]. Duke Math, 1943,10:643−647.

责任编辑:丁吉海

(上接第**201**页)

[10] DORIGO M, STUTZLE T. Ant Colony Optimization[M]. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts London, England, 2004:9−12.
[11] 覃远年,梁仲华. 蚁群算法研究与应用的新进展[J]. 计算机工程与科学,2019, 41(1):173−184.
[12] 王厚鹏,曹素芝,闫蕾,等. 多目标跟踪的飞行器集群协同实时任务分配策略[J]. 机载弹药与航天运载技术,2020, 374(3):32−37.
[13] 张先剑. 空陆攻防博弈的动态弹药目标分配[J]. 国防科学技术大学学报,2019, 41(2):185−190.
[14] 吴立尧,韩维,张勇. 基于人机合作的有人/无人机编队队形变换策略[J]. 系统工程与电子技术,2020, 42(2):434−444.
[15] 张佳龙,闫建国,张普. 基于自适应方法的多无人机编队队形控制[J]. 航空学报,2020, 41(1):234−247.
[16] 吉泽,王义涛,韩宇. 舰艇编队防空威胁扇面研究[J]. 火力与指挥控制,2020, 45(4):29−34, 39.
[17] 马良. 一种动态决策的舰艇编队防空作战模型[J]. 控制工程,2020, 273(3):487−492.

责任编辑:何莉